2025 年
第 35 回 日本数学オリンピック模試
予 選 問 題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで，問題は見ないこと．

分度器・電卓・パソコン・携帯電話，またノートや参考書などの使用は厳禁です．

携帯電話などの電源は切っておくこと．

問題は 12 問，試験時間は 3 時間です．

配点は各問 1 点，合計 12 点です．

受験番号・氏名を別紙の答案用紙に記入すること．

解答は答のみを解答用紙の該当欄に記入すること．

解答用紙だけを回収します．

2015 年 1 月 13 日

@Metachick_2021

2025 年日本数学オリンピック予選模試

@Metachick_2021

問　　題

2025 年 1 月 13 日 試験時間 3 時間 12 題（答のみを記入する）

1.　相異なる素数の組 (p, q, r) であって，

$$\sqrt{pq+1},\ \sqrt{qr+1}$$

が整数となるものを全て求めよ．

2.　すべての頂点の x, y 座標が共に整数であるような正方形を**良い正方形**という。$0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 4$ で定まる領域に含まれるような良い正方形の個数を求めよ。

3.　$AE \parallel BD,\ AB = EC = ED$ なる凸五角形 $ABCDE$ が $AE = 3,\ BD = 7,\ \angle BCE = 90^\circ$ をみたすとき，BC の長さを求めよ．

4.　正整数 n に対して、$f(n)$ を n の 200 以下の約数の個数とする．このとき，

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(1000)$$

を計算せよ．

5.　a, b, c を正の実数とする．このとき、

$$\frac{6a+b+2c}{a+3b+2c} + \frac{2a-2b+3c}{2a+3b+c} + \frac{8a+7b+6c}{5a+b+3c}$$

の最小値を求めよ．

6.　正五角形 $ABCDE$ の内部の点 P が $\angle BPA = 84^\circ,\ \angle PAE = 54^\circ$ を満たした．このとき，$\angle BDP$ の大きさを求めよ．

7.　9×10 の長方形のマス目に以下の条件を満たすように $0, 1, 2$ のいずれかの整数を書き込む方法の総数を求めよ．

- 左右に隣り合う二つのマス目について，左のマスに書かれた数字は右のマス目に書かれた数字以上である．
- 上下に隣り合う二つのマス目について，上のマスに書かれた数字は下のマス目に書かれた数字以上である．

8. 整数係数多項式 P, Q, R が，任意の実数 x に対して

$$P(x)^2 + Q(x)^2 = R(x)^2 + \frac{5}{6}Q(x)R(x)$$

を満たす．さらに，$R(0) = 36$ が成り立ち，$P(x)$ が相異なるとは限らない整数 α, β を用いて $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ の形で表現されるとき，$P(x), Q(x), R(x)$ の組としてありうるものを全て求めよ．

9. 黒板に $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{10}$ の 10 文字が左から順に書かれている．いま，黒板に書かれた 10 文字に対して以下の操作を行う．

- 操作 1：黒板に書かれた 10 文字の順番を好きなように並び替える．
- 操作 2：黒板に書かれた 10 文字の左から奇数番目の文字すべてについて，その右隣の文字と入れ替える．
- 操作 3：操作 1 で行った並べ替えと逆の並べ替えを行う．すなわち，操作 1 によって i 番目に書かれていた文字が j 番目に移ったのなら，操作 3 ではその時点で j 番目に書かれている文字が i 番目に移る．

操作 1,2,3 を終えた時点で黒板に書かれている文字列としてありうるものの総数を求めよ．

10. $AB = 5, BC = 7, CA = 8$ を満たす三角形 ABC において，辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ D, E, F とする．A から線分 EF へ下した垂線の足を P、E から線分 BC へ下した垂線の足を Q、F から線分 BC へ下した垂線の足を R とする．点 D から線分 PQ, PR へ下した垂線の足をそれぞれ X, Y とするとき，$\frac{DY}{DX}$ の値を求めよ．

11. 正整数に対して定義され，正整数値をとる関数 f が，任意の正整数 m, n に対して

$$f(m+n+1) = f(m)f(n) + f(m+1)f(n+1)$$

を満たす．このような f のうち，$|f(4) - 10^6|$ が最も小さくなるものすべてについて，$\frac{f(1012)}{f(1010)}$ の整数部分の値を求めよ．

12. 正十二面体の頂点の一つを X とし，中心に関して X と対称な頂点を Y とする．カタツムリ君は，X からスタートして，辺で結ばれた頂点に移動することを 10000 回繰り返す．ここで，直前にいた頂点に引き返すことも可能である．このとき，以下の条件を満たす移動方法の総数を，素数 5003 で割ったあまりを求めよ．

条件：一度も X に戻らず，かつ 10000 回目の移動で初めて Y に到達する．

ただし，回転して一致するような移動方法も異なるものとして数える．

第 35 回 日本数学オリンピック模試

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	**2**	**3**

4	**5**	**6**

7	**8**	**9**

10	**11**	**12**

受験番号					
会場内通し番号					

合計点