クラメルの公式

@Metachick_2021

2026 年 1 月 16 日

1　クラメルの公式

定理 1 クラメルの公式

A が n 次正則行列であるとき、連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は次のように与えられる。ただし、$[\boldsymbol{a}_1 \cdots \overset{i}{\boldsymbol{b}} \cdots \boldsymbol{a}_n]$ は A の第 i 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列である。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ x_i = \frac{\det [\boldsymbol{a}_1 \cdots \overset{i}{\boldsymbol{b}} \cdots \boldsymbol{a}_n]}{\det (A)}$$

まずは、古典的な数式による証明を 2 つ確認してみよう。

証明

行列 A が正則なので、A の逆行列は余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ と表現される。したがって、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に A^{-1} をかけると、

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}\boldsymbol{b}$$

となる。特に、x_j に注目すると、

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk} b_k.$$

ここで、$\tilde{a}_{jk}$ は行列 A の余因子行列の成分である。この右辺の $\sum$ の部分は余因子展開を考えることで次の行列式と一致する。

$$\det [\boldsymbol{a}_1 \cdots \overset{i}{\boldsymbol{b}} \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

したがって、これを整理して所望の結論を得る。■

証明

A が正則なので、この連立方程式の解は一意に定まる。$A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ と表現する。このとき、$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に留意して、行列式の多重線型性を用いて変形することで

$$\begin{aligned}\det[\boldsymbol{a}_1\cdots\overset{i}{\boldsymbol{b}}\cdots\boldsymbol{a}_n] &= \det[\boldsymbol{a}_1\cdots(x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n)\cdots\boldsymbol{a}_n] \\ &= x_1\det[\boldsymbol{a}_1\cdots\overset{i}{\boldsymbol{a}_1}\cdots\boldsymbol{a}_n]+\cdots+x_i\det[\boldsymbol{a}_1\cdots\overset{i}{\boldsymbol{a}_i}\cdots\boldsymbol{a}_n]+\cdots+x_n\det[\boldsymbol{a}_1\cdots\overset{i}{\boldsymbol{a}_n}\cdots\boldsymbol{a}_n] \\ &= x_i\det A\end{aligned}$$

が成り立つ。この式の両辺を $\det A$ で割って題意を得る。■

上二つの証明はもちろん大事だが、次に紹介する幾何的な証明は最も本質的であると言えよう。ポイントは、線型変換において図形の面積の拡大率は一定（特に行列式倍）であるという事実である。以下、簡単のため二次元の場合に限定して考える。

証明

ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{e}_1$ が作る平行四辺形 S_1 の面積は、y であり、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{e}_2$ が作る平行四辺形 S_2 の面積は x である。これら平行四辺形を行列 A によって変換する。このとき、$\boldsymbol{x},\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$ はそれぞれ $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ へと変換され、S_1,S_2 の面積は $\det A$ 倍される。よって、$x\det A=\det[\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{a}_2],\ y\det A=\det[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{x}]$ が得られる。

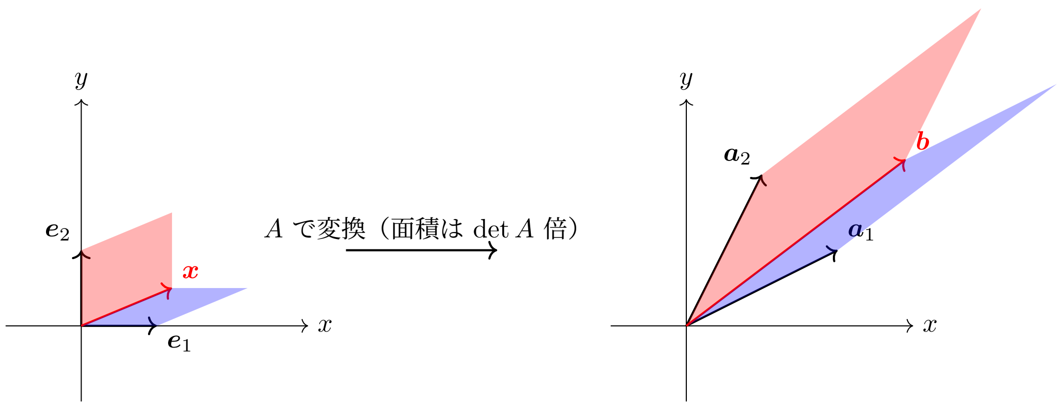

図 1: 行列 A によるベクトルと平行四辺形の変換

問題 1 特殊な係数の連立方程式

以下の連立 *1* 次方程式を解け：

$$\begin{cases}2^2x+3^2y+4^2z+5^2w=6^2\\2^3x+3^3y+4^3z+5^3w=6^3\\2^4x+3^4y+4^4z+5^4w=6^4\\2^5x+3^5y+4^5z+5^5w=6^5\end{cases}$$

■方針

掃き出し法（ガウスの消去法）を用いても良いが、計算がやや煩雑になってしまう。そこで、ここでは係数の形に着目してクラメルの公式とヴァンデルモンドの行列式を用いて解いていく。基本的には、クラメルの公式は実用できないが、行列式が計算しやすい場合には強力な武器となる。

■解答

係数行列を A とし、係数の列ベクトルを以下のように $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{b}$ と定める。

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 2^2 \\ 2^3 \\ 2^4 \\ 2^5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 3^2 \\ 3^3 \\ 3^4 \\ 3^5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix} 4^2 \\ 4^3 \\ 4^4 \\ 4^5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a_4} = \begin{bmatrix} 5^2 \\ 5^3 \\ 5^4 \\ 5^5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6^2 \\ 6^3 \\ 6^4 \\ 6^5 \end{bmatrix}$$

このとき、クラメルの公式から以下が成り立つ。

$$x_1 = \frac{\det[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}]}{\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}]}, x_2 = \frac{\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}]}{\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}]}, x_3 = \frac{\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a_4}]}{\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}]}, x_4 = \frac{\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{b}]}{\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}]}$$

ここで、行列式の多重線型性とヴァンデルモンドの行列式から $k = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2$ として、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}] &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot (3-2) \cdot (4-2) \cdot (5-2) \cdot (4-3) \cdot (5-3) \cdot (5-4) \\
&= k \cdot (6^{-2} \cdot 2^2 \cdot 3^1) \\
\det[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}] &= 6^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot (3-6) \cdot (4-6) \cdot (5-6) \cdot (4-3) \cdot (5-3) \cdot (5-4) \\
&= k \cdot (-2^{-2} \cdot 2^2 \cdot 3^1) \\
\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4}] &= 2^2 \cdot 6^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot (6-2) \cdot (4-2) \cdot (5-2) \cdot (4-6) \cdot (5-6) \cdot (5-4) \\
&= k \cdot (3^{-2} \cdot 2^2 \cdot 3^1 \cdot 4^2) \\
\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a_4}] &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot (3-2) \cdot (6-2) \cdot (5-2) \cdot (6-3) \cdot (5-3) \cdot (5-6) \\
&= k \cdot (-4^{-2} \cdot 2^1 \cdot 3^3 \cdot 4^1) \\
\det[\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{b}] &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot (3-2) \cdot (4-2) \cdot (6-2) \cdot (4-3) \cdot (6-3) \cdot (6-4) \\
&= k \cdot (5^{-2} \cdot 2^2 \cdot 3^1 \cdot 4^1)
\end{aligned}$$

よって、求める解は $(x, y, z, w) = (-9, 64, -\frac{81}{2}, \frac{144}{25})$ となる。