2026.01.07

01 超平面配置と特性多項式

超平面配置の領域数、交叉半順序集合、区間順序との対応

めたち (@Metachick_2021)
VRC 数学談話会主催

DiscordID : 472201879284219904

目次

1.
超平面配置と領域数

- 超平面配置とは何か？
- 低次元の超平面配置
- 一般次元での超平面配置

2.
交叉半順序集合

- 交叉半順序集合
- メビウス関数と特性多項式
- 有限体法による計算

3.
区間順序

- 区間順序の定義
- 超平面配置との対応

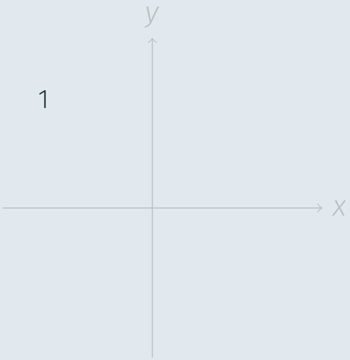
「超平面配置の**特性多項式**とその周辺について話します！」

超平面配置の領域数

超平面配置とは何か？ - 2次元の直線配置による平面の分割

「平面を直線で分割しよう！」

- ０本：領域は１つ

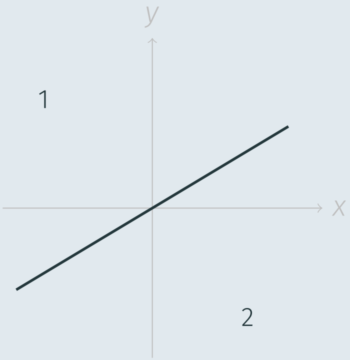


図：0 本の直線による平面の分割

超平面配置とは何か？ - 2次元の直線配置による平面の分割

「平面を直線で分割しよう！」

- ０本：領域は１つ
- １本：領域は２つ
  → 直線によって分割される



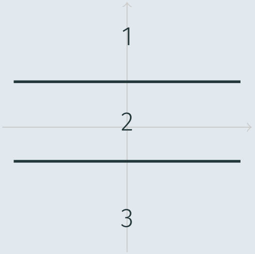
図：１本の直線による平面の分割

超平面配置とは何か？ - 2 次元の直線配置による平面の分割

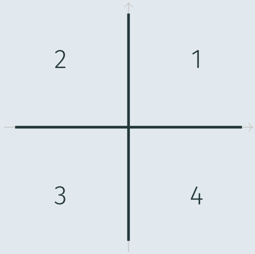
「直線が 2 本の時は？」

- 0 本：領域は 1 つ
- 1 本：領域は 2 つ
  → 直線によって分割される
- 2 本：領域は 3 or 4 つ
  → 直線の配置に依存する

平行な場合（3 領域）



交差する場合（4 領域）



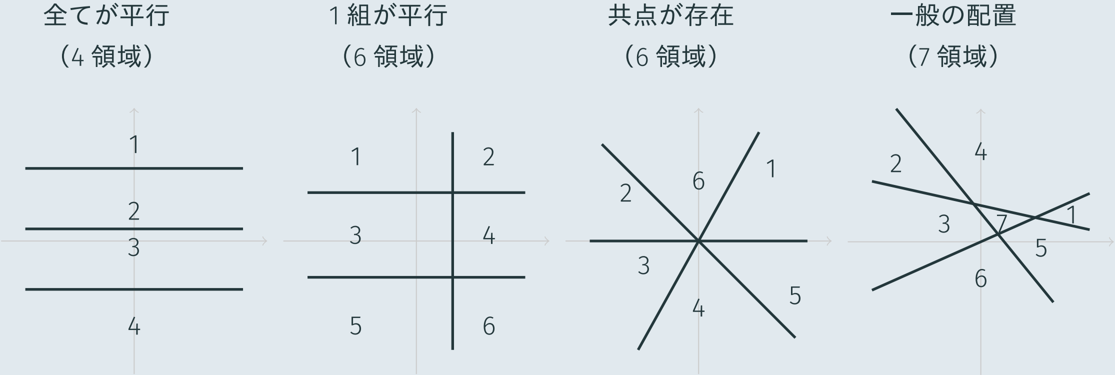
図：2 本の直線による平面の分割

超平面配置とは何か？ - 2次元の直線配置による平面の分割

「では、直線が3本の時は...？」

- 領域の最大数、最小数はいくつだろうか...？
- 領域の個数が異なる二つの配置について、その本質的な違いは何だろうか...？
- あるいは、領域の個数が同じ二つの配置について何が共通しているのか...？
- 平面を5つに分割することはできるだろうか...？

超平面配置とは何か？ - 2 次元の直線配置による平面の分割



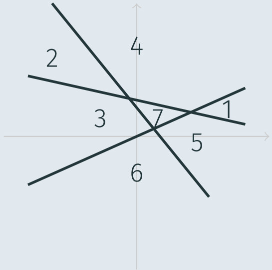
図：3 本の直線による平面の分割

超平面配置とは何か？ - 2 次元の直線配置による平面の分割

「領域数は直線の配置に依存する」

- ０本：領域は 1 つ
- １本：領域は 2 つ
  → 直線によって分割される
- ２本：領域は 3,4 つ
  → 直線の配置に依存する
- ３本：領域は 4,6,7 つ
  → より複雑に配置に依存する

平面配置では、直線が n 本の場合についての振る舞いを考察する。



図：一般の位置にある 3 本の直線による平面の分割

超平面配置とは何か？ - で、超平面配置って何なの？

「直線配置は 2 次元の超平面配置である！」

平面上の直線の配置と領域の個数という話題を紹介した。
この話題を、高次元の場合でも考えたくなってくる...。

- 2 次元 → 平面に直線を配置する
- 3 次元 → 空間に平面を配置する

  ⋮ ⋮

- n 次元 → n 次元空間に n-1 次元の超平面を配置する

  ⋮ ⋮

この n 次元での n-1 次元超平面の配置を超平面配置と呼ぶ。
今日は、この超平面配置を巡る幾らかの話題を紹介する。

超平面配置とは何か？ - 形式的な定義

定義 1．超平面配置

以下で与えられる $\mathbb{R}^d$ 内の有限個の超平面の集合 $\mathcal{A}$ を超平面配置 という。

$$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$$

超平面（アフィン超平面）は平面に対する直線や、空間に対する平面の一般化。

- 形式的には「$\mathbb{R}^d$ 上の超平面は $d-1$ 次元線型部分空間を平行移動したもの」
- あるいは $a \neq 0$ を用いて、$H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x = b\}$ で定めることもできる。

この定義から、超平面は空間を次の二つの領域（連結成分）に分割する。

- 正の側：$\mathbb{R}^d_> = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x > b\}$
- 負の側：$\mathbb{R}^d_< = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x < b\}$

改めて、今日の目標を！

目標①

一般の次元の超平面配置が与える領域の個数の計算方法を理解する！

→まずは、この話題について初等的に扱う。

目標②

超平面配置の特性多項式が様々な数学的概念を結び付けることを知る！

→特性多項式は様々な概念と関連しており、互いに翻訳することができる。

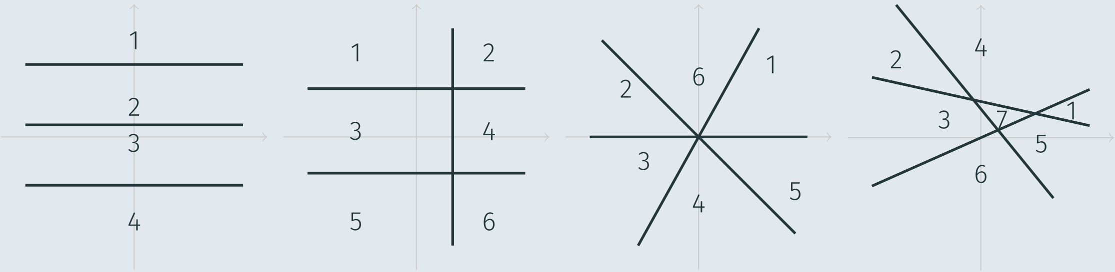
- 有限体上の点の数え上げ
- グラフの彩色
- 複素超平面配置の補集合のコホモロジー次元
- 単位的区間順序の個数

特に、今日は単位的区間順序の個数について紹介する。

「2次元の超平面配置の領域数を求める！」

3本の直線の場合を思い出そう。その領域数は直線の配置に大きく依存した。

全てが平行	1組が平行	共点が存在	一般の配置
(4領域)	(6領域)	(6領域)	(7領域)



低次元の超平面配置 - 2 次元の例

「直線の配置とは、直線の交わり方である」

直線の配置に依存するといったが、直線の配置とは具体的に何であろうか...？
3 本の直線の例では、領域数が異なる場合には直線の交点の個数が変化していた。

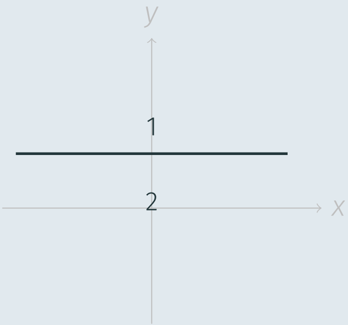
配置の種類	交点の個数	領域の個数
すべて平行	0	4
1 組が平行	2	6
共点が存在	1	6
一般の配置	3	7

ここからは、交点の個数に着目しながら考察してみよう。

低次元の超平面配置 - 2 次元の例

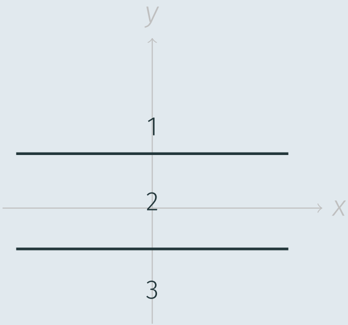
「2 本目の直線を追加することを考える」

平行の場合、新しい直線は元の領域 2 を新たに二つの領域 2,3 に分割する。



図：1 本の直線による平面の分割

直線を追加

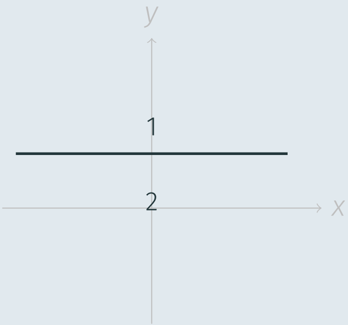


図：2 本の平行な直線による平面の分割

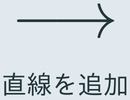
低次元の超平面配置 - 2 次元の例

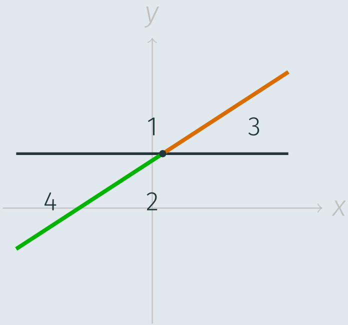
「2 本目の直線を追加することを考える」

交わる場合、二つの直線は交わる。特に、元の直線は新しい直線を分割する。



図：1 本の直線による平面の分割

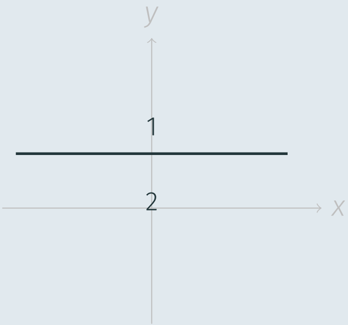




図：2 本の交わる直線による平面の分割

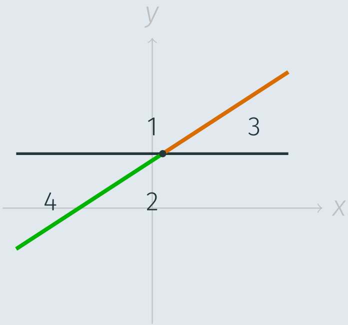
「2 本目の直線を追加することを考える」

分割された半直線がそれぞれ領域 1,2 を二分割する。



図：1 本の直線による平面の分割

直線を追加



図：2 本の交わる直線による平面の分割

低次元の超平面配置 - 2 次元の例

「既存の直線は新しい直線を分割する」

以下のような構造が背景にあることが分かった。

- 新しい直線を追加する
- その新しい直線が既存の直線によって分割される
- 分割されてできた半直線は、それぞれが元あった領域を 2 つに分割する

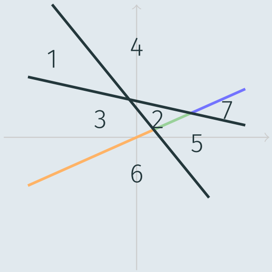
また、これは既存の直線が複数ある時にも成立する。このことを確認してみよう。

低次元の超平面配置 - 2 次元の例

ch($\mathcal{A}$) で超平面配置 $\mathcal{A}$ の領域数を表す。[a]

- $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{l_{n+1}\}, \ \mathcal{A}'' = \mathcal{A}' \cap l_{n+1}$
- $\mathcal{A}''$ の各領域は、$\mathcal{A}'$ の領域を 2 つに分割する。
- よって、$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}') + \mathrm{ch}(\mathcal{A}'')$ を得る。

[a] $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ は 2 次元の超平面配置、$\mathcal{A}''$ は 1 次元の超平面配置



図：新しい直線は分割される

低次元の超平面配置 - 2 次元の例

2 次元：n 本の直線での最大領域数

$$r_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \frac{n(n-1)}{2} + n + 1.$$

漸化式として、$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}') + \mathrm{ch}(\mathcal{A}'')$ を解けばよい。

- $\mathrm{ch}(\mathcal{A})''$ は既存の直線すべてと交わる時最大となる。
- これは一般の配置で実際に達成される。
- 追加の直線を $1, 2, \ldots$ と順に置いたときの領域数を r_n とすると、

$$r_{n+1} = r_n + (n+1), \qquad r_0 = 1.$$

- 初期条件は $r_0 = 1$ であった。これを解くと、上の結果が得られる。

低次元の超平面配置 — 2 次元の例

交点の重複込みを取り入れた一般式

各交点 p に対し、m_p を「その交点を通る直線の本数」とする。すると

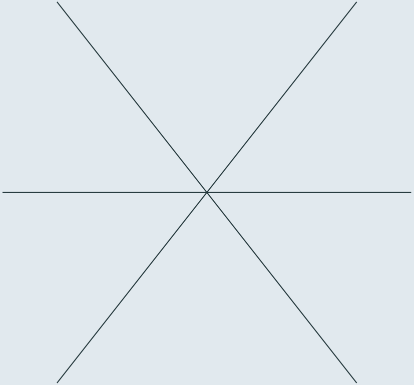
$$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) \;=\; 1 + (\text{直線本数}) + \sum_p (m_p - 1)$$

が成り立つ。

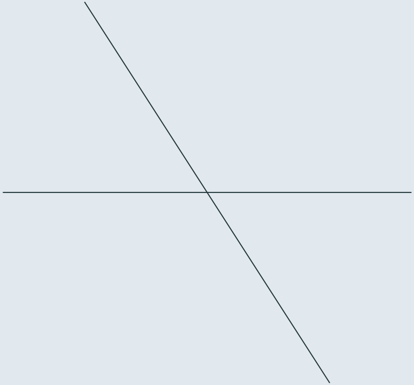
- $\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}') + \mathrm{ch}(\mathcal{A}'')$ であった。
- 右辺は「領域の基本数（1）＋直線による分割数＋交点の重複寄与」を表す。
- 一般位置ではすべての交点が 2 本交わり $(m_p = 2)$、$\sum_p (m_p - 1) = \#$交点 となる。

低次元の超平面配置 — 2 次元の例

例えば、交点の重複寄与は以下のようになる。



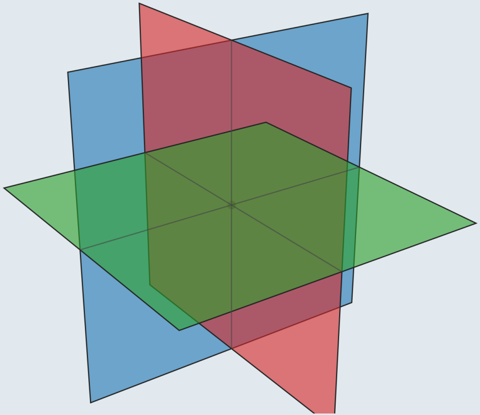
$$m_p - 1 = 2$$
$$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = 1 + 3 + 2 = 6$$



$$m_p - 1 = 1$$
$$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = 1 + 2 + 1 = 4$$

低次元の超平面配置 - 3 次元の例

「三次元の場合は、空間上に平面を配置する。」



低次元の超平面配置 - 3 次元の例

3 次元の削除制限定理 (領域数バージョン)

$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}') + \mathrm{ch}(\mathcal{A}'')$

三次元でも、同様の議論が行える。

- 既存の平面配置は、新しく追加された平面を分割する。
- 分割された平面の各領域は、それぞれ既存の領域を 2 分割する。

最大の領域数も計算することができる。

- 二次元の場合と同様に漸化式として解けば、平面が n 枚のときの最大の領域数が $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ であることがわかる。

一般次元での超平面配置

削除制限定理 (領域数バージョン)

$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}') + \mathrm{ch}(\mathcal{A}'')$

一般の次元でも、同様の議論が成り立ち、上の領域数に関する式が成り立つ。

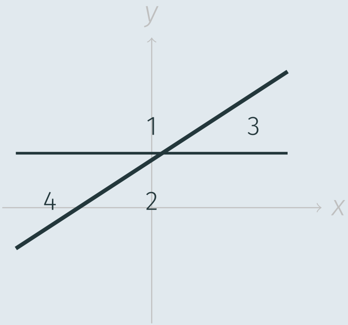
- $\mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{A}'$ は超平面の個数が少なく、$\mathcal{A}''$ は次元が低い。
- したがって、帰納的に m 次元での超平面配置の領域数が計算できる。

交叉半順序集合

交叉半順序集合 - 領域数を決定する情報は何か？

「超平面配置の領域数を決定する本質的な情報は何か？」

例えば、以下の二つは異なる配置だが、領域数を数える上では一緒だとみなしたい！

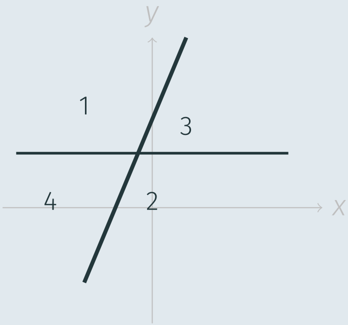


図：直線配置 1

$\Longleftrightarrow$

傾きは違う

けど…



図：直線配置 2

交叉半順序集合 - 領域数を決定する情報は何か？

「本質的な情報とは直線の交わり方である」

- 領域数は、直線の傾き・位置といった数値的な量は本質ではない。
- 重要なのはどの直線同士が交わるか、どの点でどのように交わるかである。
  すなわち、交点の組合せ構造のみが領域数を決定する。
- 実際、$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}') + \mathrm{ch}(\mathcal{A}'')$ を用いて帰納的に計算すると、交点の組み合わせ構造だけで領域数が決定されることがわかる。

交叉半順序集合 - 形式的な定義

定義 2．交叉半順序集合

$\mathcal{A}$ を超平面配置とする。順序を逆包含、すなわち $X \leq Y \iff X \supseteq Y$ として交叉半順序集合 $L(\mathcal{A})$ が定まる。

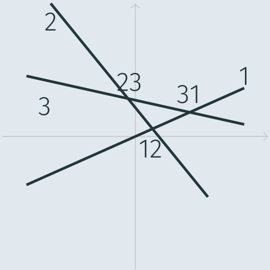
$$L(\mathcal{A}) = \left\{ X \mid X = \bigcap_{H \in S} H,\ S \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

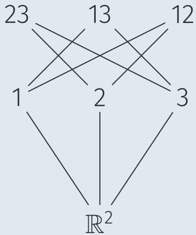
- 最小元 $\hat{0}$ は空の交差、すなわち全空間 $\mathbb{R}^n$ である。
- 包含でなく、逆包含なのは単なる慣習。
- これにより、超平面どうしの交叉の情報を扱うことができる。

交叉半順序集合 - ハッセ図

「交わり方の情報をうまく表現するには？」

超平面配置は、包含関係を順序として半順序集合となる。
半順序集合を記述するツールとして、ハッセ図というものがある。
下段が平面全体、中段が直線、上段が交点を表している。

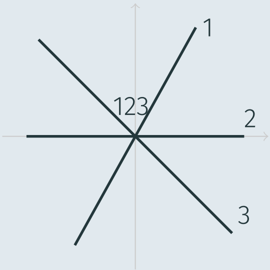




交叉半順序集合 - ハッセ図

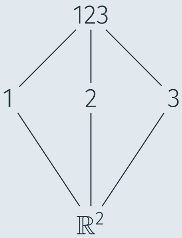
「交わり方の情報をうまく表現するには？」

交わり方の情報を交叉半順序集合のハッセ図というツールで表現する。



$\longrightarrow$

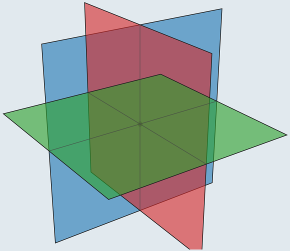
交わりの情報
だけを抽出



交叉半順序集合 - ハッセ図

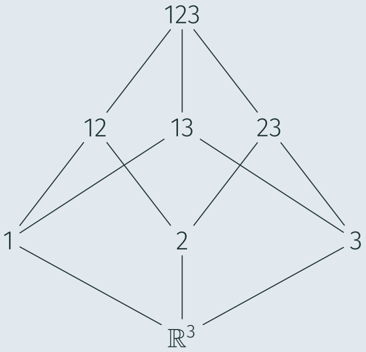
「三次元でもうまく機能する」

下の段から順に、空間、平面、直線、点を表現している。



⟶

交わりの情報
だけを抽出



交叉半順序集合 ー 実際、何ができるんですか？

「半順序集合で整理できることはわかったけど…」

交叉半順序集合 ー 実際、何ができるんですか？

「半順序集合に対してメビウス関数というツールが使える！」

- 半順序集合は簡潔に整理するだけでなく、それ自体が数学的に有用である。
- 交叉半順序集合を調べるツールとして、メビウス関数がある。
- メビウス関数を用いて超平面配置に対する特性多項式というものが定義できる。
- この特性多項式は、超平面配置の様々な情報を扱うことができる。

交叉半順序集合 - メビウス関数と特性多項式

定義３．メビウス関数

半順序集合 $(P, \leq)$ 上のメビウス関数 $\mu : P \times P \to \mathbb{Z}$ を次で定める：

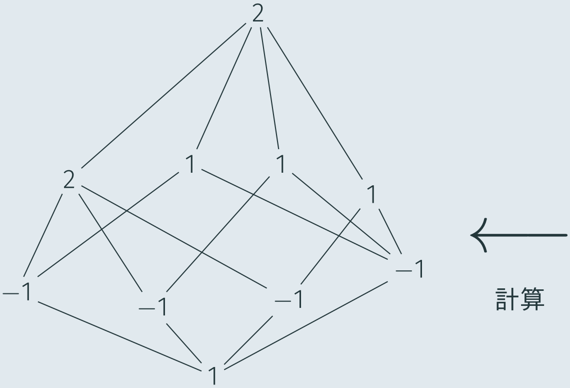
$$\mu(x, x) = 1, \qquad \text{for } x < y : \quad \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$$

- ある種の累積和（下からの和）を元に戻すための代数的な逆作用素の一種である。
- 反転公式：もし $g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$ ならば

$$f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x)\, g(y)$$

が成り立つ。

交叉半順序集合 - メビウス関数と特性多項式



- 1 段目：値は 1
- 2 段目から上：
  その点の下側の点の値を全て足して-1 倍
- これによって、帰納的にメビウス関数の値が定義される

交叉半順序集合 - 特性多項式の定義

定義４．特性多項式

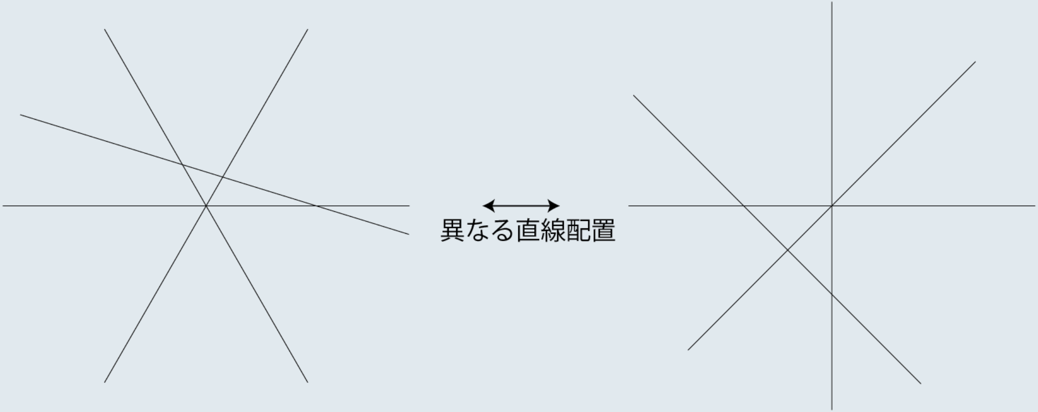
$\mathcal{A}$ を ℓ 次元空間上の超平面配置、$L(\mathcal{A})$ をその交叉半順序集合とすると、

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(\hat{0}, X)\, t^{\dim X}$$

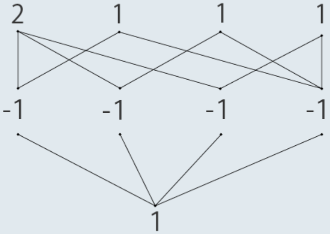
- この $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ は交叉半順序集合に対する不変量である。
- 超平面配置を記述する情報を多く含んでいる。
- 領域数や有界な領域数、そのほかトポロジー的な情報も含んでいる。
- 特性多項式の嬉しいポイントがいくつかあるので紹介していく。

交叉半順序集合 - 特性多項式は不変量！

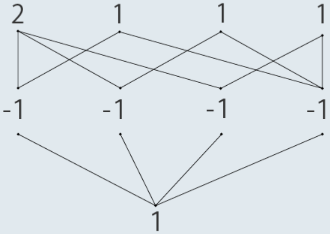
「異なる超平面配置でも、交叉半順序集合が同じなら特性多項式は一致する」



「異なる超平面配置でも、交叉半順序集合が同じなら特性多項式は一致する」

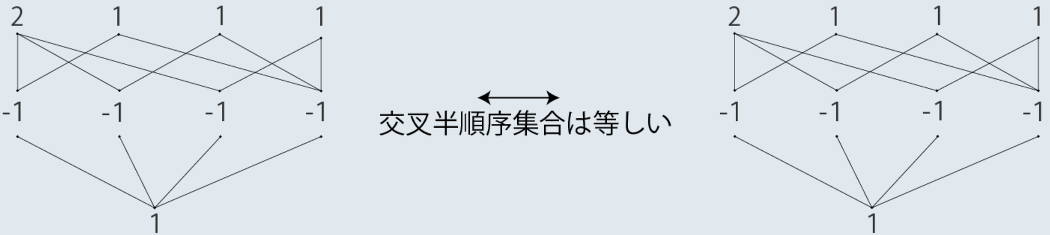


交叉半順序集合は等しい

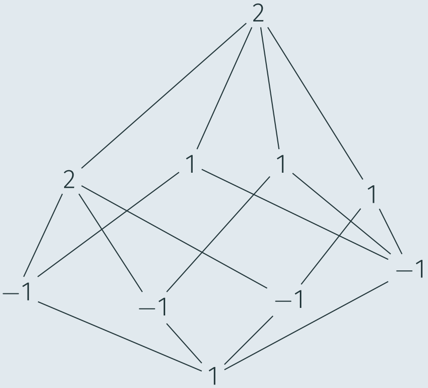


交叉半順序集合 - 特性多項式は不変量！

「異なる超平面配置でも、交叉半順序集合が同じなら特性多項式は一致する」



特性多項式は共に $t^2 - 4t + 5$ となる！



$\longrightarrow$

特性多項式

- 左の図は 3 次元の超平面配置
- メビウス関数の和は 3,2,1,0 次元の順に 1,-4,5,-2 となる。
- 特性多項式は $t^3 - 4t^2 + 5t - 2$ となる。

定理５． Zaslavsky の定理

$\mathbb{R}^\ell$ 上の本質的な超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して、領域数 $r(\mathcal{A})$ は

$$r(\mathcal{A}) \ = \ (-1)^\ell \chi_{\mathcal{A}}(-1)$$

また有界領域数 $b(\mathcal{A})$ は

$$b(\mathcal{A}) \ = \ (-1)^\ell \chi_{\mathcal{A}}(1)$$

本質的であるとは、$\mathcal{A}$ のいくらかの超平面の交叉が一点 (0 次元) となることを言う。

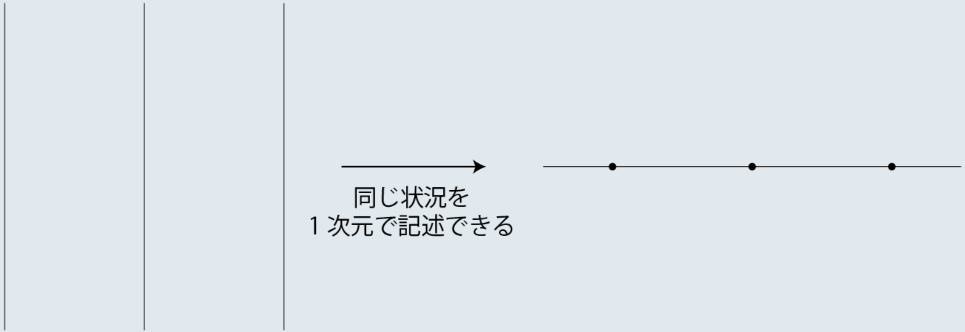
例えば、前ページの超平面配置の領域数は、

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^3 \chi_{\mathcal{A}}(-1) = -\chi_{\mathcal{A}}(-1) = 1 + 4 + 5 + 2 = 12$$

となる。

交叉半順序集合 - 本質的配置でない例

「左の平面上の直線配置は非本質的である。」



定理 6． 削除制限定理

$H \in \mathcal{A}$ を選ぶと、削除 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H\}$ と制限（restriction）$\mathcal{A}'' = \{\, H \cap H' \mid H' \in \mathcal{A}' \,\}$ に対し、

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) \;=\; \chi_{\mathcal{A}'}(t) \;-\; \chi_{\mathcal{A}''}(t)$$

- これはメビウス関数の反転公式によって証明される！

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \implies f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x)\, g(y)$$

- 最初に議論した、$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}') + \mathrm{ch}(\mathcal{A}'')$ に対応している。
- これにより、特性多項式も帰納的に計算できることがわかる！

交叉半順序集合 - 削除制限定理の例

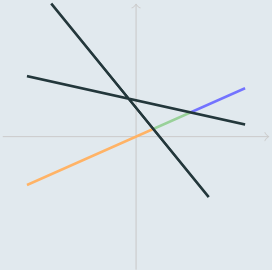
「$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t)$ が成り立つ！」

$\mathcal{A}'$（2 次元）

$\chi_{\mathcal{A}'}(t) = t^2 - 2t + 1$

$\mathcal{A}''$（1 次元）

$\chi_{\mathcal{A}''}(t) = t - 2$



$\mathcal{A}$（2 次元）

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 3t + 3$

交叉半順序集合 - 有限体法（Finite-field method）

「特性多項式を簡単に計算するには？」

- 特性多項式を計算するには、交叉半順序集合を特定し、メビウス関数を計算しなければならない。
- 場合によっては、交叉半順序集合を特定するのが難しいことがある。
- 実は、有限体法という計算方法が存在する。

交叉半順序集合 - 有限体法（Finite-field method）

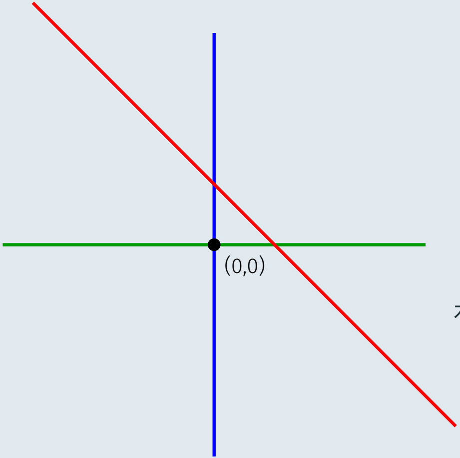
定理 7

$\mathcal{A}$ を $\mathbb{Z}$ 係数の一次式で定義される $\mathbb{R}^l$ の超平面配置とする。このとき、十分大きな素数 p に対して、

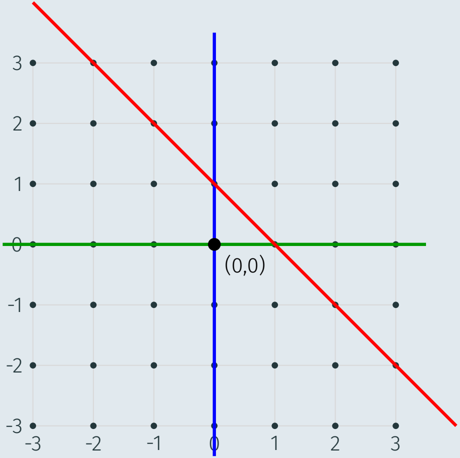
$$\#\left(\mathbb{F}_p^\ell \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H\right) = \chi_{\mathcal{A}}(p)$$

- この定理は、有限体の点の個数を数え上げることで特性多項式を計算できることを主張している。
- より一般に、準多項式を用いたこの定理の精緻化が存在する。

交叉半順序集合 - 有限体法（Finite-field method）



有限体へ帰着



交叉半順序集合 - 有限体法（Finite-field method）

証明のスケッチを紹介する。

- 十分大きい素数 p では、各交叉半順序集合の元 X 上の点の個数が $p^{\dim X}$ となる。
- 任意の点 $v \in \mathbb{F}_p^{\ell}$ に対し

$$X(v) := \bigcap_{H \in \mathcal{A},\ v \in H} H$$

  を定める。この $X(v) \in L(\mathcal{A})$ はその点の最小交叉空間である。
- 各 $X \in L(\mathcal{A})$ に対し

$$f(X) = \#\{v \in \mathbb{F}_p^{\ell} \mid X(v) = X\}, \qquad g(X) = \#X$$

  とおけば、$g(X) = \sum_{Y \subseteq X} f(Y)$ が成り立つ。

交叉半順序集合 - 有限体法（Finite-field method）

- この形は、メビウス関数の反転公式が適用できる。

$$f(V) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu_L(X, V)\, g(X),$$

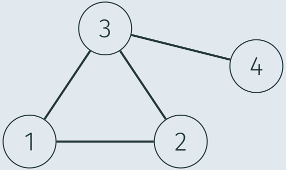
- ここで、超平面配置の補集合である。つまり、左辺はどの超平面にも入らない点の個数である。
- $\#\left(\mathbb{F}_p^\ell \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H\right) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(\mathbb{R}^\ell, X) \# X = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(\mathbb{R}^\ell, X) p^{\dim X} = \chi_{\mathcal{A}}(p)$
- よって、定理 7 が証明できた！

「グラフの頂点彩色とも関係している！」

- グラフ G の k-彩色の総数を $\chi_G(k)$ とおく。
- 対応する超平面配置 $\mathcal{A}_G$ が存在して、超平面配置の側で分析できる。
- グラフにおいて、頂点 i, j が結ばれていることと、$x_i = x_j$ という超平面が対応する。

グラフ G	グラフ配置 $\mathcal{A}_G$
彩色多項式 $\chi_G(t)$	特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}_G}(t)$
$(G, G\backslash e, G/e)$	$(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$
削除縮約公式	削除制限公式
彩色の集合	補集合

余談 - 彩色多項式との関係



- $\mathcal{A}_G = \{H_{12}, H_{23}, H_{13}, H_{34}\}$ が対応する。
- ただし、$H_{ij} : x_i - x_j = 0$ である。

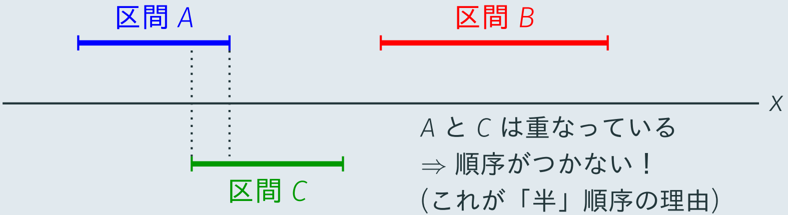
超平面配置の応用：区間順序

区間の順序：重ならないなら大小あり！

直感的な定義

区間 A が 区間 B の「完全に左側」にあるとき、$A < B$ という順序（大小関係）が定まる。

$A < B, C < B$ であるが、A, C に大小関係はない。



A と C は重なっている
$\Rightarrow$ 順序がつかない！
(これが「半」順序の理由)

区間順序の定義 - 区間順序の定義

定義 8.　区間順序

半順序集合 $(P, \prec)$ が区間順序であるとは、次のような閉区間との対応
$I : P \to \{[l_x, r_x] \subset \mathbb{R}\}$ が存在して，任意の $x, y \in P$ について

$$x \prec y \quad \Longleftrightarrow \quad r_x < l_y$$

を満たすことをいう。

- つまり、順序関係を保って対応する区間の族があれば、区間順序となる。
- 上の定義では端点を共有する場合は $\prec$ にならない。
- また、すべての区間の長さが 1 であるとき、単位的区間順序という。

区間順序の定義 - 区間順序の例

例．区間順序の例

要素 $\{a, b, c\}$ が $a \prec b \prec c$ なる順序構造を満たすとき、これは区間順序である。

これは区間順序である。例えば、以下のような区間の族が対応する。

$$I_a = [0, 1], \quad I_b = [2, 3], \quad I_c = [4, 5]$$

このとき $r_a = 1 < 2 = l_b$ より $a \prec b$, 同様に $b \prec c$ となる。

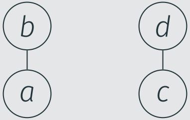
区間順序の定義 - 区間順序でない例

例. 区間順序でない例

$2+2$ の半順序集合は区間順序でない。

$$a \prec b, \quad c \prec d$$

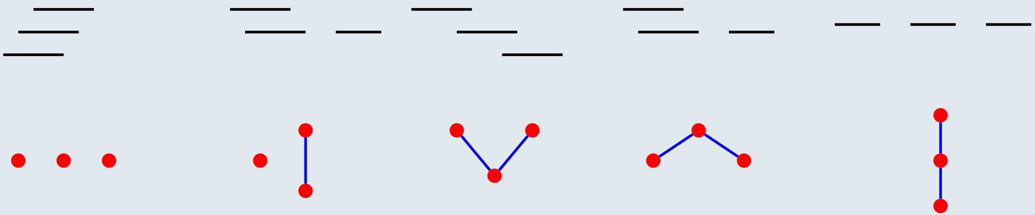
（a, b と c, d の間に比較関係はない。）



この半順序集合は、どう頑張っても、区間の族で表現することができない…。

区間順序の定義 - 考えたい問題

「各区間の幅がすべて 1 であるような 3 個の区間からなる区間の族を考える。」



例． $\rho = (1, 1, 1)$ の場合、構造は上の 5 通りで各区間を区別すると 19 通りとなる。

- 与えられた区間の幅 $\rho = (L_1, \ldots, L_n)$ に対して、この方法で得られる異なる区間順序の個数 $\#\mathcal{P}_\rho$ を求めたい。
- 今回は、各区間を区別する場合の個数を数える。

超平面配置との対応 - 主張の紹介

定理 9

$\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n_+$ とする。$\mathbb{R}^n$ の超平面配置 I_ρ を

$$H_{ij} : x_i - x_j = \sigma_i \qquad (i \neq j)$$

によって定めるとき、この超平面配置の領域数 $r(I_\rho)$ は集合 $\mathcal{P}_\rho$ の要素数に等しい。

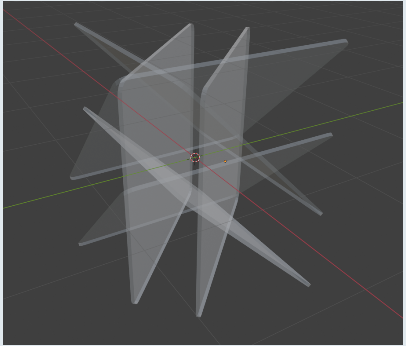
- 与えられた $\rho \in \mathbb{R}^n_+$ から得られる区間順序の個数 $\mathcal{P}_\rho$ が対応する超平面配置の領域数を考えることで求められる。
- 今回は、$\rho = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n\text{ 個}})$ に対して、単位的区間順序の個数 $\#\mathcal{P}_\rho$ を求めてみる。

超平面配置との対応 - 単位的区間順序の個数を求めるには？

- $\rho = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n\text{ 個}})$ に対して、単位的区間順序の個数 $\#\mathcal{P}_\rho$ を求めたい。
- 前ページの定理から、$r(I_\rho) = \#\mathcal{P}_\rho$ であるから、$r(I_\rho)$ を求めればよい。
- Zaslavsky の定理を使いたいが、I_ρ は本質的配置でないから工夫が必要。
- ブール配置 $B_n = \{H_i \mid H_i : x_i = 0\}$ との合併 $C_n = I_\rho \cup B_n$ は本質的配置かつ $r(C_n) = n!r(I_\rho)$ が成り立つ。つまり、$r(C_n)$ が分かればよい！
- これにより、Zaslavsky の定理から $r(C_n) = (-1)^\ell \chi_{C_n}(-1)$ であるので、$\chi_{C_n}(t)$ が分かればよく、これ有限体法が適用可能。

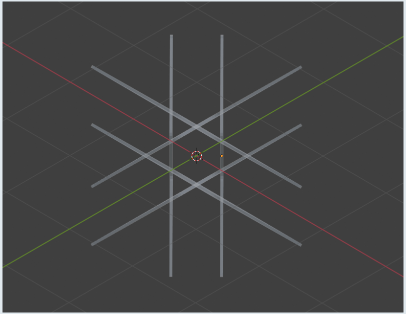
→今日は $r(I_\rho) = \#\mathcal{P}_\rho$ を証明する。

お手元の超平面配置 I_ρ を斜めから見ると、平面的に見える。



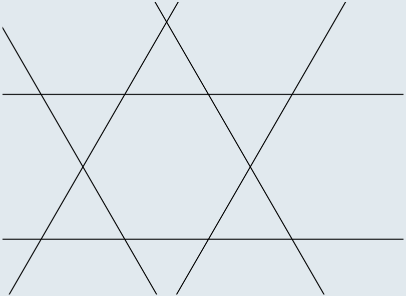
$\longrightarrow$

斜めから見る



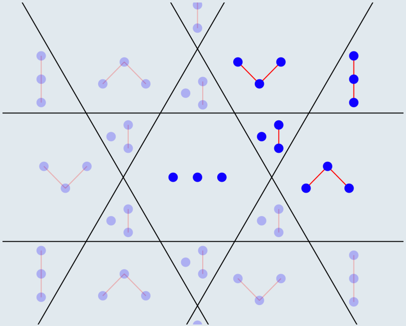
超平面配置との対応 - 単位的区間順序と超平面配置との対応

- $\rho = (1,1,1)$ とする。お手元の超平面配置 I_ρ を斜めから見ると、平面的に見える。
- 区間順序と各領域の対応を示す。



斜めから見ると、
平面上の配置のように見える

区間順序が
対応



各領域に区間順序が対応する

超平面配置との対応 - 証明を与える

一般の ρ に対して、$r(I_\rho) = \#\mathcal{P}_\rho$ を証明する。

- 点 $(x_1, \ldots, x_n)$ を超平面配置 I_ρ のある領域 R に取る
- 各 i に対し、区間 $I_i = [x_i - \sigma_i, x_i]$ を定義する
- 領域 R は不等式 $x_i - x_j < \sigma_i$ または $x_i - x_j > \sigma_i$ の成り立ち方によって決まる
- この不等式は、区間順序において $I_i \prec I_j$ または $I_i \not\prec I_j$ が成り立つことと同値
- よって、領域 R の選択は区間の族 $\{I_1, \ldots, I_n\}$ の区間順序を一意に定める
- 逆に、区間順序から領域も一意的に定まる。
- $\sigma(I_i) = \sigma_i$ を固定したとき、得られる区間順序の総数は $r(I_\rho)$ に等しい

まとめ

超平面配置の領域数は求められる！

削除制限定理 (領域数バージョン)

$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}') + \mathrm{ch}(\mathcal{A}'')$

- この定理によって交叉の情報が分かれば、高次元の超平面配置の領域数も帰納的に計算できることが分かった！
- 交叉の情報は交叉半順序集合で記述できた：

$$L(\mathcal{A}) = \left\{ X \mid X = \bigcap_{H \in S} H,\ S \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

- 本質的な配置の場合には、交叉半順序集合に対して定まる不変量の一つである特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ を用いて、$\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = (-1)^{\ell}\chi_{\mathcal{A}}(-1)$ と表現できた。

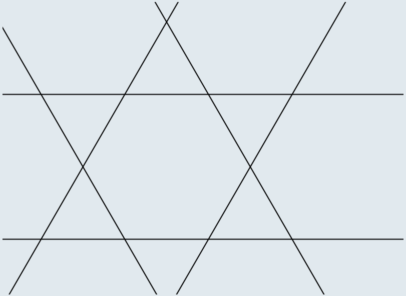
特性多項式は多くの概念を関連付ける

「特性多項式は多くの概念を関連付けた！」

- 超平面配置の領域数、有界な領域数
- 有限体上の点の個数の数え上げ
- グラフの彩色多項式
- 区間順序の数え上げ
- 複素超平面配置の補集合のコホモロジー次元

一例として、区間順序と超平面配置の対応を見た！

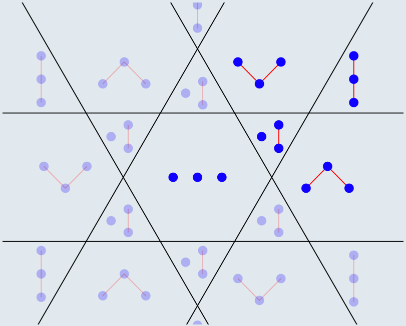
「$\rho = (1,1,1)$ に対して、$I_\rho, \mathcal{P}_\rho$ は以下のように対応した」



斜めから見ると、
平面上の配置のように見える

$\longrightarrow$

区間順序が
対応



各領域に区間順序が対応する

参考文献

- 吉永正彦：『やさしくまなぶ超平面配置』，日本評論社，2025 年
- Richard P. Stanley：“Combinatorial Theory: Hyperplane Arrangements”，MIT OpenCourseWare，2004 年，Chapter 5: Finite Fields，https://ocw.mit.edu/courses/18-315-combinatorial-theory-hyperplane-arrangements-fall-2004/703f0b5aecce90b89f34d10d9f52ac54_lec5.pdf，2025/12/29