

# プログラム

21:00 挨拶・紹介

21:05 講演 ” 良い特異点と悪い特異点 ”

21:45 質問

22:00 写真

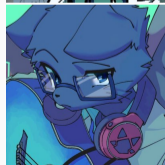
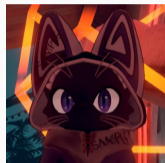
22:10 追加の質問

# About Me

## EDAbears

Singularity Theory / Differential Geometry

- ▽ 専門：特異点論、特に特異点を持つ曲面について
- ▽ 今日のテーマ：良い特異点と悪い特異点
- ▽ 趣味：
  - ジャンル問わず本を読むこと (認知心理・趣味多め)
  - Twitter に流れてきた美味しそうな料理を作ること
  - 自分の好きな歌い方を探すこと



# 良い特異点と悪い特異点

---

# 目次

- ▽ 関数の特異点
- ▽ 関数の族と Versality
- ▽ 色々な曲線・曲面の実現
- ▽ 埋め込み・はめ込みと特異点

## ▽ 関数の特異点

---

# 1 変数の関数の特異点

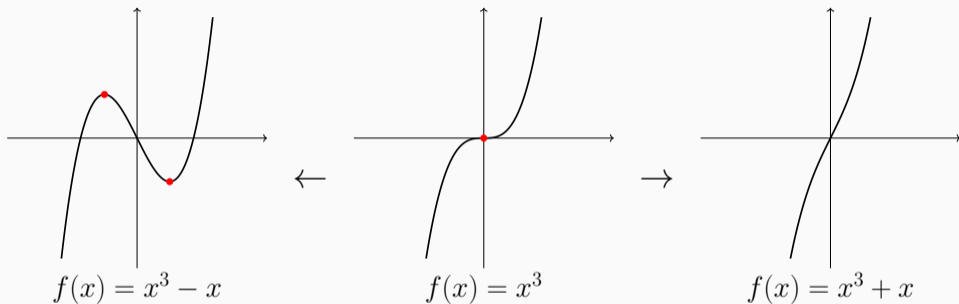


Figure 1: 三次関数の分岐

実際,  $f(x) = x^3 + ax$  に対して  $f'(x) = 3x^2 + a$

## 2次関数の極値

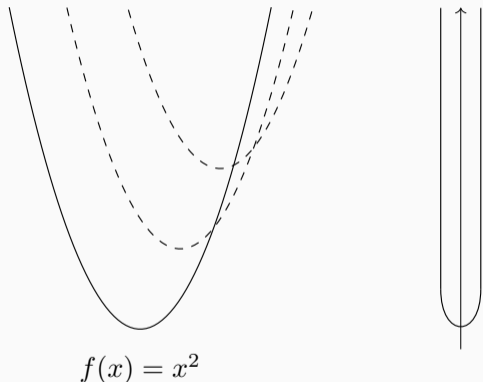


Figure 2: 2次関数と摂動

- 2次関数は摂動しても形は変わらない. 実際

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に注意

# 3次関数の極値と2次近似

- 極値は

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

より  $x = \pm 1$  である.

- 3次関数の平行移動は

$$\begin{aligned} & (x - p)^3 - 3(x - p) + q \\ &= x^3 - 3px^2 + (3p^2 - 3)x + p^3 + q \end{aligned}$$

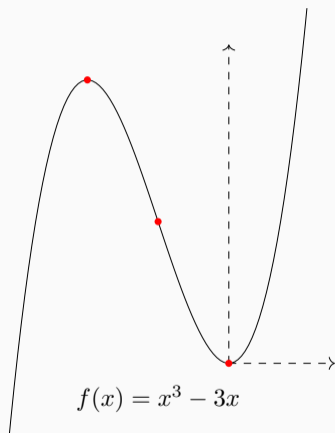
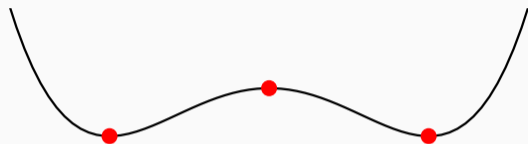


Figure 3: 3次関数と2次近似

## 4次関数の極値と2次近似



$$f(x) = x^4 - 2x$$

**Figure 4:** 4次関数と2次近似

極値は  $x = \pm 1, 0$ .

平行移動は

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f(x - p) + q = \cdots + (4p^3 - 4p)x + \cdots$$

# ファイバーのトポロジーの違い

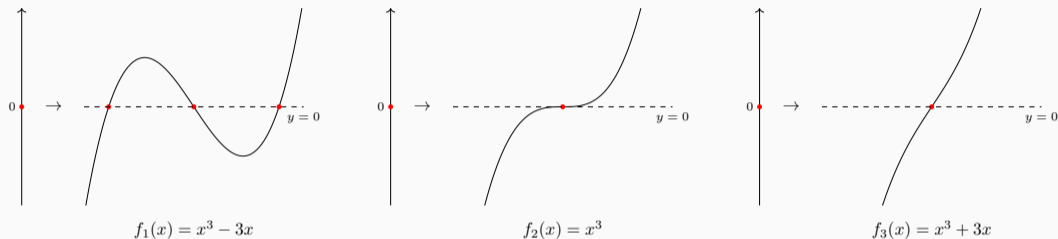


Figure 5: 3次関数の分岐と0点ファイバー

- $f^{-1}(0)$  の連結成分が異なるため  $\# \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \text{diffeo. s.t.}$

$$f_1 \circ \varphi = f_3$$

## 2変数関数の極値とその消滅

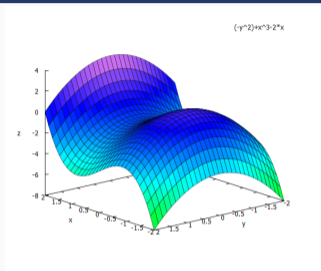


Figure 6:  $x^3 - y^2 - 2x$

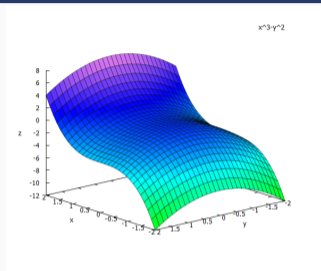


Figure 7:  $x^3 - y^2$

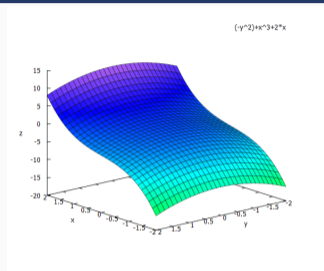


Figure 8:  $x^3 - y^2 + 2x$

• 山と谷がぶつかって、なだらかになっている。

•  $f(x,y) = x^3 - y^2 - 2x$  に対して  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 2$ ,  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$ .

$$f(x-p, y-q) - r = \dots + (3p^2 - 2)x + 2qy + \dots$$

# 関数の安定な特異点

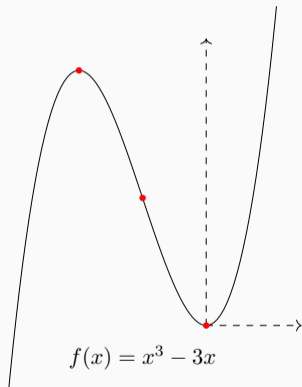


Figure 9: 3次関数

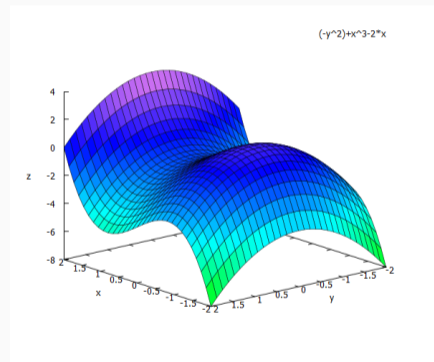


Figure 10: 3次曲面

# Morse 関数

## Def.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : "Morse 関数"  $\Leftrightarrow$  特異点  $J_f(p) = \mathbf{0}$  は非退化  $H_p(f) \neq 0$

$$J_f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \quad H_p(f) = \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij}$$

• 例えば  $f(x) = x^3 - 3x$  なら

$$J_f(p) = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3$$

$$H_{x=\pm 1}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 6x|_{x=\pm 1}$$

•  $f(x, y) = x^3 - y^2 - 2x$  なら

$$J_f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (3x^2 - 2, -2y)$$

$$H_p(f) = \det \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -12x$$

# Morse 関数と稠密性

Morse 関数とは特異点なら 2 次の項が支配的ということ

$$\text{ex.) } f(x) = x^3 - 3x, \quad f(x, y) = x^3 - y^2 - 2x$$

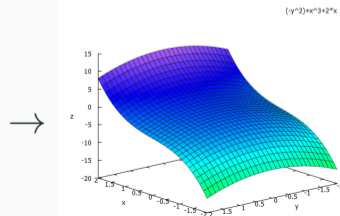
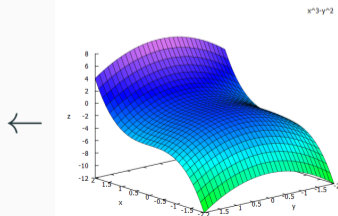
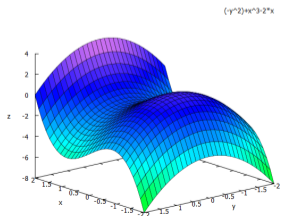
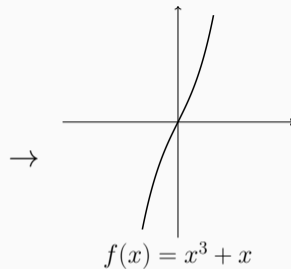
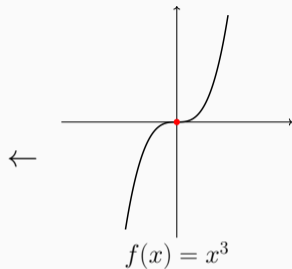
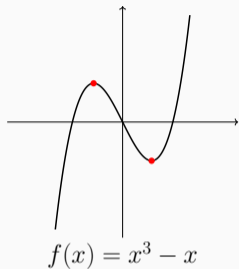
**Thm.**

$0 \in U$ :nbh. で定義された  $C^\infty$  関数  $g$  に、いくらでも近い Morse 関数  $f$  が存在する.

[proof]

- $f = g + ax$  とすればこれが Morse 関数になる. また, この  $a$  はいくらでも小さくして良い.

# 悪い特異点



# 悪い特異点の種類

- 1変数関数での悪い特異点は  $f(x) = x^k$ .
- 2変数関数は簡単ではない.

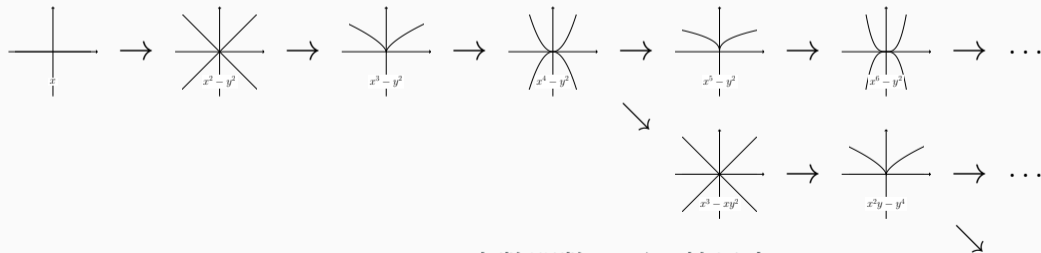
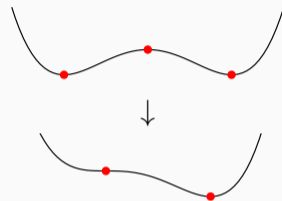


Figure 11: 2変数関数の悪い特異点

## ▽ 関数の族と Versality

---

# 関数の族

”関数族”とはパラメーター付きの関数のこと。

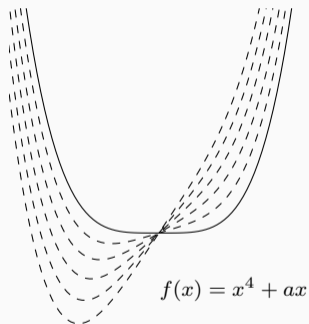


Figure 12:  $x^4$  の摂動

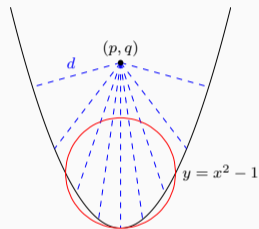


Figure 13: 距離二乗関数

$$\begin{aligned}d^2((x, x^2 - 1), (p, q)) \\&= (x - p)^2 + (x^2 - 1 - q)^2 \\&= -2px - (2q + 1)x^2 + \dots\end{aligned}$$

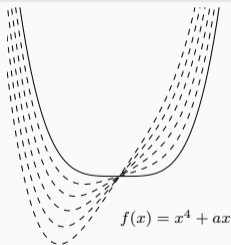
# Versality

Def.

関数  $f$  の関数族  $F$  が "Versal"

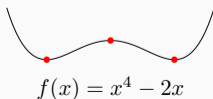
$\Leftrightarrow F$  の微小変形で  $f$  の取りうる全ての微小変形を含んでいる。

versalでない族

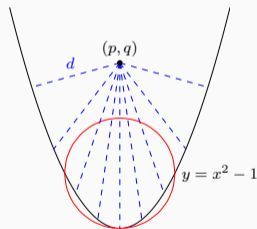


※  $x^4 + bx^2 + ax$  は

versal



versalな族



$$d^2((x, x^2 - 1), (p, q)) \\ = -2px - (2q + 1)x^2 + \dots$$

# 距離二乗関数

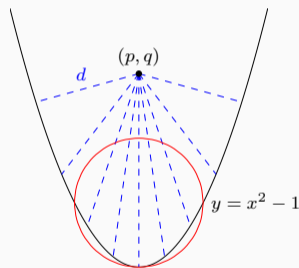
- 曲線の各点ごととある点への距離を関数にしたもの
- パラメーターは平面上の点  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$

**Def.**

$d_f^2(x, p, q) : f$  の"距離二乗関数"

$$\Leftrightarrow d_f^2(x, p, q) = \left| \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right|^2$$

※滑らかにするため2乗している



**Figure 14:** ある点での距離二乗関数

# 距離二乗関数の Versality

どんな曲線  $y = f(x)$  なら  
距離二乗関数は Versal になるだろうか？  
→ 円と 4 次の接触しちゃいけない

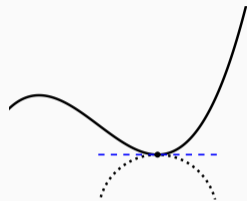


Figure 15: 円の接触



$$y = x^4 + ax^2 + bx$$

$$\text{左: } (a, b) = (-2, -0.5)$$

$$\text{右: } (a, b) = (-1, -1)$$



$$y = d_{x^2-1}^2(x, p, q)$$

$$\text{左: } (p, q) = (0.5, 1)$$

$$\text{右: } (p, q) = (1.5, -1)$$

# 高さ関数と versality

- 曲線の各点ごとのある方向への高さ関数を関数にしたもの。
- パラメーターは円周  $v \in S^1$

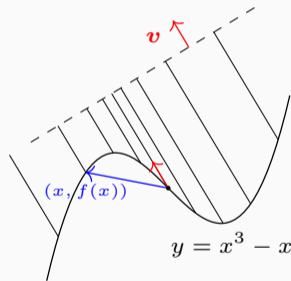
**Def.**

$H_f(x, v)$  :  $f$  の "高さ関数"

$$\Leftrightarrow H_f(x, v) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, v \right\rangle$$

※単位ベクトルとの内積は、射影したときの大きさ

- $H_f$  が versal になるためには直線  $y = 0$  と4次の接触をしちゃいけない。



**Figure 16:** ある方向での高さ関数

## ▽ 色々な曲線・曲面の実現

---

# 円周の実現 (1次元・2次元・3次元)

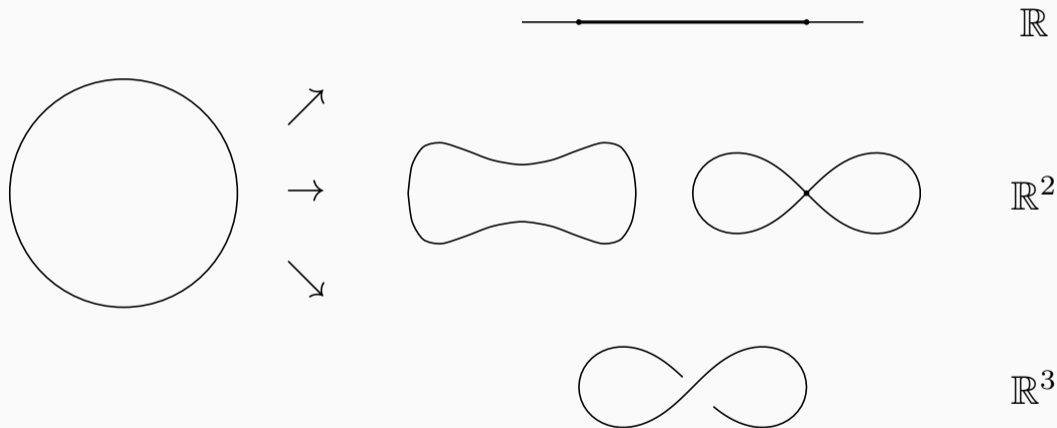
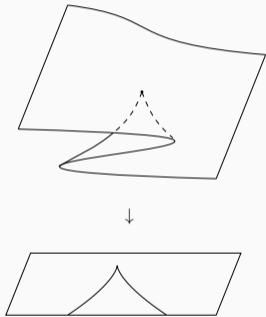
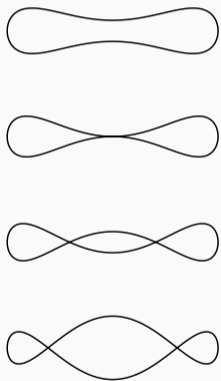
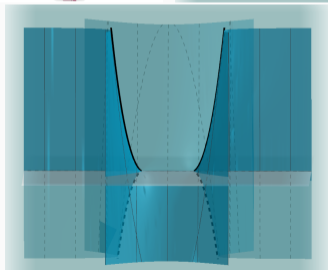
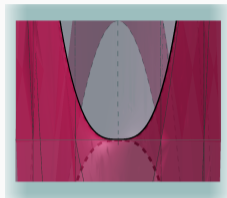
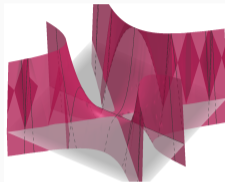


Figure 17: 円周を 1, 2, 3 次元に実現する

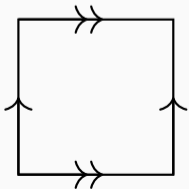
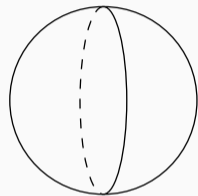
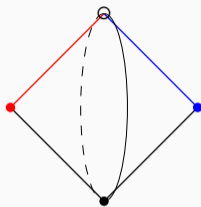
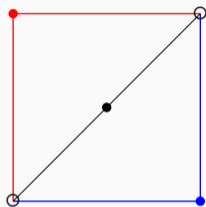
# 安定特異点



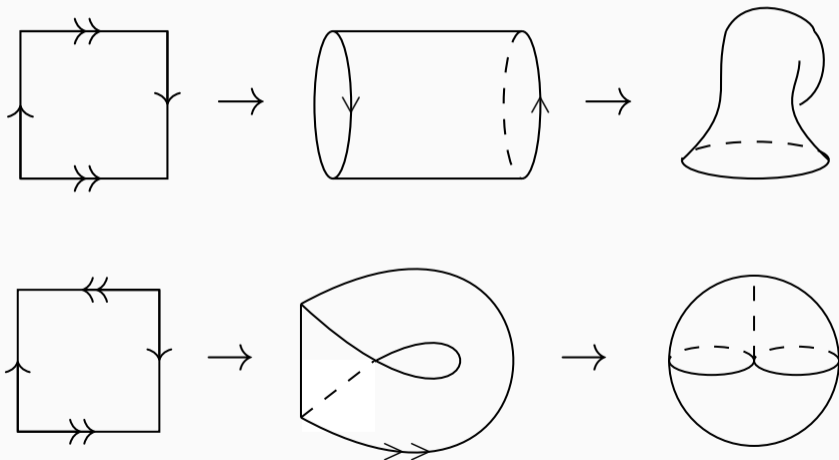
$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



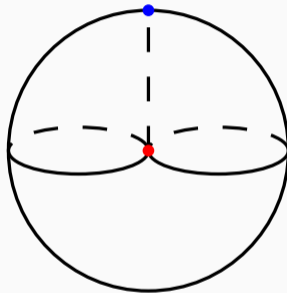
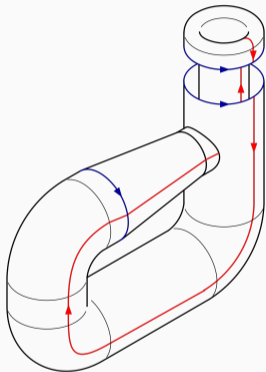
# 色々な二次曲面 (球・トーラス)



# 色々な二次曲面 (Kleinの壺・射影平面)



# Klein の壺の自己交差と射影平面の特異点



Def.

" $m$ 次元多様体"  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  局所的に  $m$  次元 Euclid 空間と同一視できる空間

## ▽ 埋め込み・はめ込みと特異点

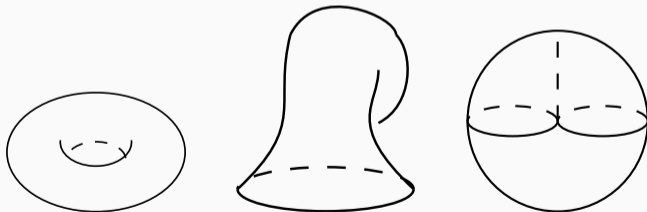
---

# 埋め込みとはめ込み

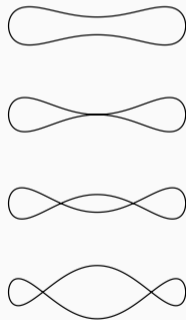
## Def.

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^\infty$  とする。

- $f$  が "はめ込み"  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  特異点がない
- $f$  が "埋め込み"  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  特異点がなく全単射



1 dim m.f.d.  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$



# 埋め込み・はめ込み定理 & 特異点版はめ込み定理

**Thm.**

すべての (コンパクト)  $n$  次元多様体は  $\mathbb{R}^{2n}$  にはめ込める。

**Thm.**

すべての (コンパクト)  $n$  次元多様体は  $\mathbb{R}^{2n+1}$  に埋め込める。

**Thm.**

すべての (コンパクト)  $n$  次元多様体 ( $n \geq 2$ ) は  $\mathbb{R}^{2n-1}$  に Whitney の傘を許容してはめ込める。

# Klein の壺と射影平面の特異点

**Cor.**

すべての2次元多様体は  $\mathbb{R}^4$  にはめ込める。

**Cor.**

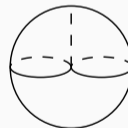
すべての2次元多様体は  $\mathbb{R}^5$  には埋め込める。

**Cor.**

すべての(コンパクト)2次元多様体 ( $n \geq 2$ ) は  $\mathbb{R}^3$  に Whitney の傘を許容してはめ込める。



Klein の壺



射影平面

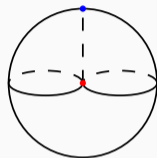
# 弱いはめ込み定理

## Thm.

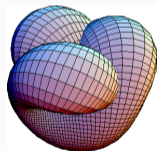
すべてのコンパクト  $n$  次元多様体 ( $n \geq 2$ ) は  $\mathbb{R}^{2n-1}$  に常にはめ込める。

## Cor.

すべてのコンパクト 2次元多様体は  $\mathbb{R}^3$  に常にはめ込める。



射影平面



Boy 曲面

# 埋め込み・はめ込み・Whitneyの傘の稠密性

$M$  をコンパクトな  $n$  次元多様体とする。

**Thm.**

すべての  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ,  $C^\infty$  ははめ込み写像で近似できる。

**Thm.**

すべての  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $C^\infty$  は埋め込み写像で近似できる。

**Thm.**

すべての  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ ,  $C^\infty$  は Whitney の傘を許容したはめ込み写像で近似できる。

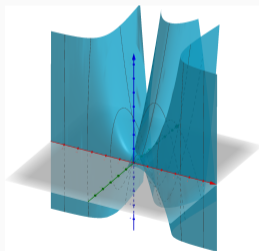
※この意で本質的な下限である。

# 悪い写像の特異点

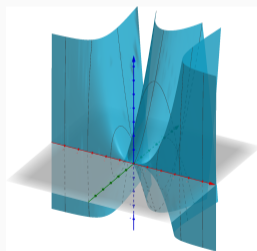
$(x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 - x^2y + ky)$  という写像を考える。

※  $k = 0$  のとき  $S_1$  特異点という。

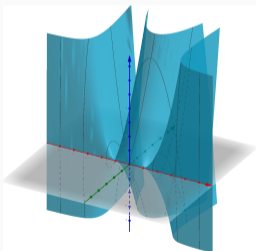
$k = -1$



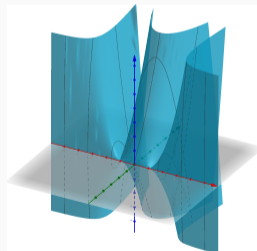
$k = 0$



$k = 1$



$k = 2$



- $S_1$  特異点は  $k \rightarrow +0$  だと Whitney の傘 ( $S_0$ ) を持つ写像で近似できる。

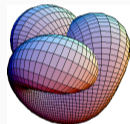
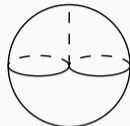
# 良い特異点までを持っていい写像

## Def.

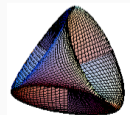
$f : M^m \rightarrow N^n$  が"安定写像"  $\stackrel{\text{def}}{\iff} f$  の任意の摂動  $f_u$  は  
 $\exists \varphi : M^m \rightarrow M^m, \text{ diffeo. } \psi : N^n \rightarrow N^n, \text{ diffeo.}$   
s.t.  $f_u = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$

## E.g.

- $M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ , 埋め込みは安定写像である。
- $M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ , はめ込みは安定写像である。
- $M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$ ,  $S_0$  を持つはめ込みは安定写像である。
- $M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$ , はめ込みは安定写像とは限らない。



Boy 曲面

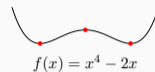
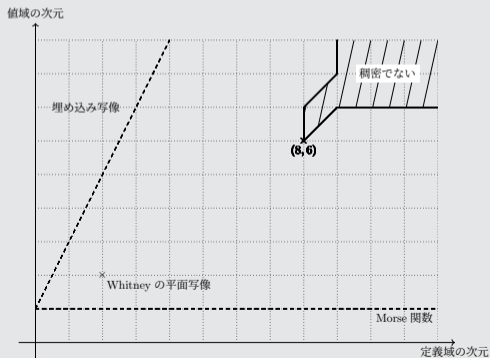


Roman 曲面

# 構造安定性定理

Thm.

$M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  安定写像全体が写像空間  $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  で稠密なのは、次の  $(m, n)$  の組で必要十分である。



↓



# Thank you for listening

## 参考

- S. Izumiya, etc, ” Differential Geometry from a singularity viewpoint ”
- 泉屋周一など, ” 特異点の数理 1 幾何学と特異点 ”
- 松本幸夫, ” Morse 理論の基礎 ”
- 野口広, 福田拓生, ” 初等カタストロフィー ”