2026.02.18

04 Weylの等分布定理

Fourier 解析を利用した数論へのアプローチ

めたち (@Metachick_2021)
VRC 数学談話会主催

目次

1|B

等分布とは何か

– 小数部分の振る舞いの例

– “均等に分布” の定式化

– Weyl の等分布定理

2|C

Weyl の等分布定理の証明

– 解析的な問題への言い換え

– Fourier 解析の利用

– 証明の完成

3|C

応用例

– Benford の法則

– モンテカルロ法

「今日は数論の問題を解析の視点から解きます！」

等分布とは何か

今日考えてみたいこと

「$n\times$(無理数) の小数部分はどのように振舞うか？」

- $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\ldots$ の小数部分は $0.4142\ldots$, $0.8284\ldots, 0.2426\ldots$ のようになる
- $\pi, 2\pi, 3\pi\ldots$ の小数部分はどうだろうか？
- $\log 2, 2\log 2, 3\log 2$ の小数部分は...？

小数部分の振る舞いの例 - $n\sqrt{2}$ の小数部分

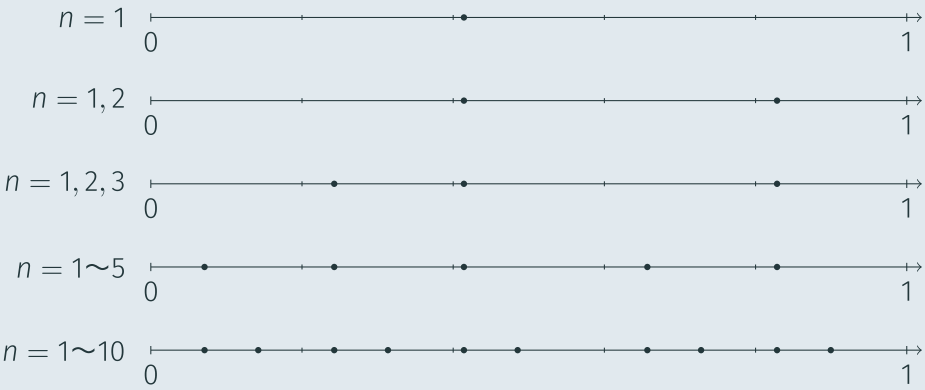
「$\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \cdots$ の小数部分を考えよう」

実数 x に対して、その小数部分を $\{x\}$ と表現することにする。

- $\{\sqrt{2}\} = \{1.4142...\} = 0.4142...$
- $\{2\sqrt{2}\} = \{2.8284...\} = 0.8284...$
- $\{3\sqrt{2}\} = \{4.2426...\} = 0.2426...$
- $\{4\sqrt{2}\} = \{5.6569...\} = 0.6569...$
- $\{5\sqrt{2}\} = \{7.0710...\} = 0.0710...$
- $\{6\sqrt{2}\} = \{8.4852...\} = 0.4852...$
- $\{7\sqrt{2}\} = \{9.8994...\} = 0.8994...$
- $\{8\sqrt{2}\} = \{11.3137...\} = 0.3137...$

小数部分の振る舞いの例 - $n\sqrt{2}$ の小数部分

「小数部分を数直線にプロットしてみる」



小数部分の振る舞いの例 - $n\sqrt{2}$ の小数部分

「小数部分を数直線にプロットしてみる」

小数部分の振る舞いの例 - $n\sqrt{2}$ の小数部分

「$n\sqrt{2}$ の小数部分は均等に分布しているのではないか？」

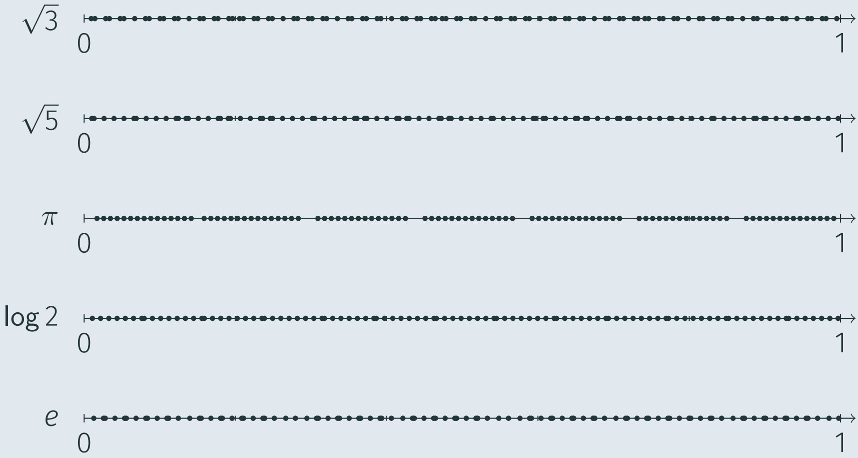
$n = 1$〜200 のとき

- “均等に” を数学的に表現することはできるだろうか？
- $\sqrt{2}$ 以外の無理数ではどうだろうか...？

小数部分の振る舞いの例 - いろいろな無理数で実験

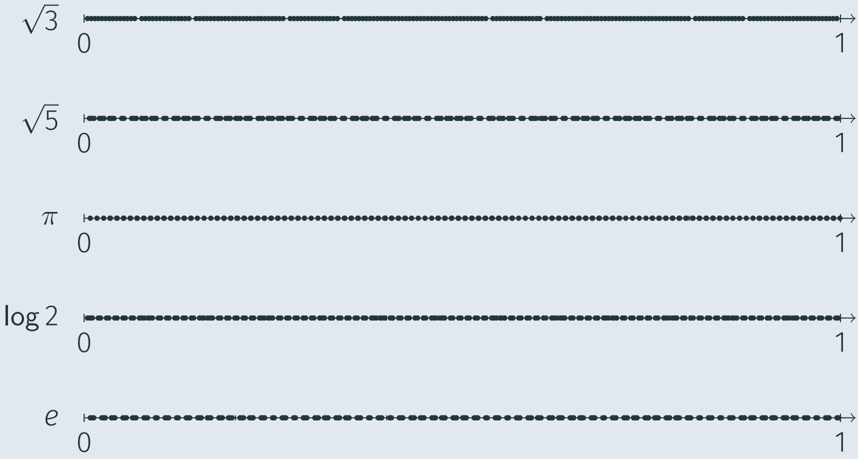
$n = 1 \sim 10$

小数部分の振る舞いの例 - いろいろな無理数で実験



$n = 1〜100$

小数部分の振る舞いの例 - いろいろな無理数で実験



$n = 1$〜200

小数部分の振る舞いの例 - $n\times$(無理数) の小数部分

予想

$n\times$(無理数) の小数部分は均等に分布している。

- 今日はこの予想を数学的に定式化し、証明していく
- 最後には、応用例を紹介していく
- ちなみに、有理数 $\frac{q}{p}$ の場合には小数部分は $\frac{k}{p}$ の形になるから等分布ではない

“均等に分布” の定式化 - 数学的に記述する

「“均等に分布” を定式化するにはどうしたらよいだろうか？」

- 直感的には、区間全体に満遍なく散らばっている
- 例えば、半分の長さの区間には全体の 50%が分布していてほしい
- 区間の長さの割合を考えて定式化する

“均等に分布” の定式化 - 等分布の例

- 点がほぼ等間隔に並んでいる
- 赤い区間は [0.2, 0.6]（長さ 0.4）
- 全体の点のうち、およそ 40%が赤い区間に入る
- どの区間を選んでもこれは成り立つ

→等分布である

“均等に分布”の定式化 - 等分布でない分布の例

- 点が左半分 [0, 0.5] にはたくさんあるが、右半分 [0.5, 1] には少ない
- 赤い区間は [0.2, 0.6] (長さ 0.4)
- 全体の点のうち、40%より真に多い点が含まれる

→等分布でない（偏っている）

“均等に分布” の定式化 - 等分布の定義

定義. 点列の等分布

点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が区間 $[0,1]$ 上で等分布していることは、任意の $0 \le a < b \le 1$ に対して以下が成り立つことをいう。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \{ n \in \{1, 2, \dots, N\} \mid a_n \in [a, b]\} = b - a$$

- $\#A$：集合 A の要素数
- 左辺：区間 $[a, b]$ に入る点の割合の極限値
- 右辺：区間 $[a, b]$ の長さ

Weyl の等分布定理 - 定理の主張

定理．Weyl の等分布定理

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \{ n \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid \{n\gamma\} \in [a, b] \} = b - a$$

- この定理は $n\times$(無理数) の小数部分が等分布であることを主張している
- 無理数は $\sqrt{2}, \pi, \log 2$ などどんなものでも構わない
- この定理を証明するにはどうしたらよいだろうか...？

Weyl の等分布定理 - より弱い定理の紹介

定理．Kronecker の稠密定理

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、$a < \{n\gamma\} < b$ なる自然数 n が存在する。

- $n\times$(無理数) の小数部分が稠密に分布していることが知られている
- Weyl の等分布定理はその存在が均等に分布することまで示唆しているが、Kronecker の稠密定理は分布の仕方については説明を与えない[1]
- 証明は比較的シンプルで、鳩ノ巣原理を用いる

[1] この意味で、Kronecker の稠密定理は Weyl の等分布定理の弱い結果であると言える

Weyl の等分布定理の証明

解析的な問題への言い換え - 関数の話に置き換える

定理．Weyl の等分布定理

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \{ n \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid \{n\gamma\} \in [a, b]\} = b - a$$

- 関数に関する様々な理論（すなわち解析学）を利用して解きたい！
- この問題を関数を使って言い換えることを考える
- 関数 $\varphi_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [a,b]) \\ 0 & (x \notin [a,b]) \end{cases}$ と定める

解析的な問題への言い換え - $\varphi_{a,b}$ を利用する

定理．Weyl の等分布定理

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \{\, n \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid \{n\gamma\} \in [a, b] \} = b - a$$

- このとき、$\varphi_{a,b}$ を用いれば、主張の左辺は次のように変形できる

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \{\, n \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid \{n\gamma\} \in [a, b] \} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{\, n \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid \varphi_{a,b}(\{n\gamma\}) = 1 \right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi_{a,b}(\{n\gamma\})
\end{aligned}$$

解析的な問題への言い換え - 言い換え①

定理．Weyl の等分布定理

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \{ n \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid \{n\gamma\} \in [a, b]\} = b - a$$

$\downarrow$ ($\int_0^1 \varphi_{a,b}(x)dx = b - a$ と併せて)

定理．Weyl の等分布定理の言い換え①

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi_{a,b}(\{n\gamma\}) = \int_0^1 \varphi_{a,b}(x)dx$$

解析的な問題への言い換え - $n\gamma$ の小数部分ではなく…

定理．Weyl の等分布定理の言い換え①

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi_{a,b}(\{n\gamma\}) = \int_0^1 \varphi_{a,b}(x)dx$$

- 小数部分 $\{n\gamma\}$ が解析的に扱いにくい
- $\{n\gamma\} \in [a,b]$ とある $m \in \mathbb{Z}$ が存在して $n\gamma \in [m+a, m+b]$ となることは同値
- $\psi_{a,b}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varphi_{a,b}(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ を周期的に拡張したものとすれば、

$$\{n\gamma\} \in [a,b] \iff \psi_{a,b}(n\gamma) = 1$$

解析的な問題への言い換え - 言い換え②

定理．Weyl の等分布定理の言い換え①

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi_{a,b}(\{n\gamma\}) = \int_0^1 \varphi_{a,b}(x)dx$$

↓

定理．Weyl の等分布定理の言い換え②

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) = \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx$$

解析的な問題への言い換え - 言い換え②

定理．Weyl の等分布定理の言い換え②

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) = \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx$$

- 周期関数を解析する問題に帰着できた
- 周期関数の解析には、Fourier 解析を用いる！
- 次ページでは、すこしだけ Fourier 解析の紹介を…

「Fourier 級数展開とは、三角多項式による近似である！」

- 周期 1 の周期関数 f を sin, cos の無限和で表すことを Fourier 級数展開という

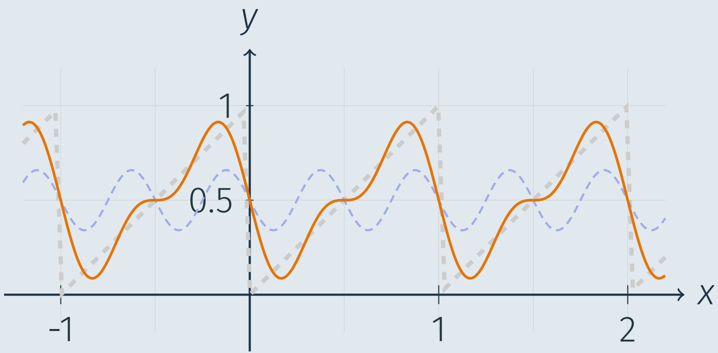
$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx))$$

- Taylor 展開の三角関数版
- 各係数 a_n, b_n は三角関数の直交性を用いて計算できる（今回は不要）

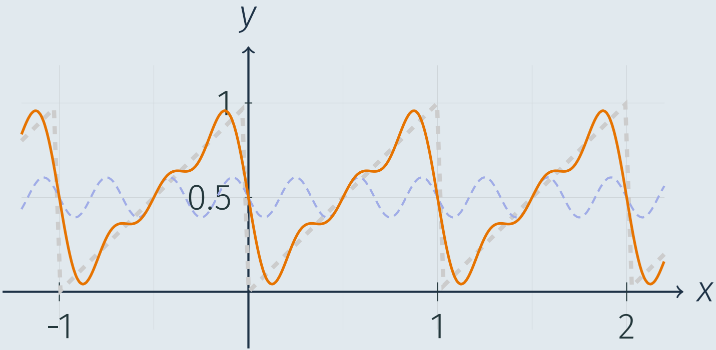
Fourier 解析の利用 - 速習 Fourier 解析

$N = 1$

Fourier 解析の利用 - 速習 Fourier 解析

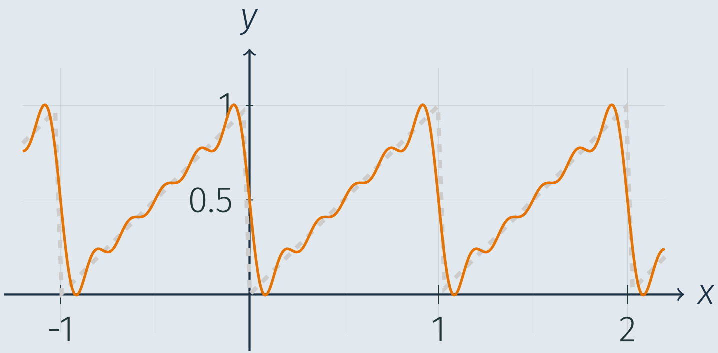


$N = 2$



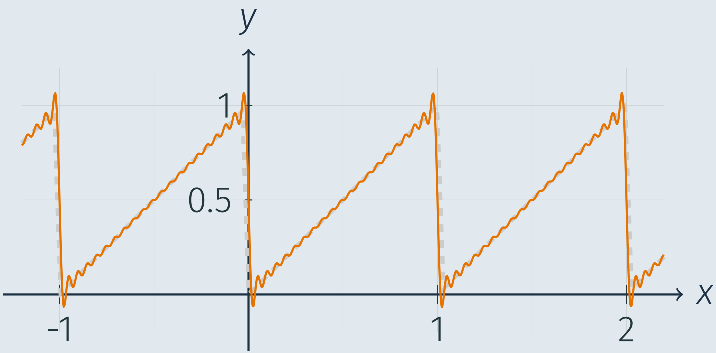
$N = 3$

Fourier 解析の利用 - 速習 Fourier 解析



$N = 5$

Fourier 解析の利用 - 速習 Fourier 解析



$N = 20$

「Fourier 級数展開はだいたい収束する！」

Fourier 級数がもとの関数に収束するための十分条件を挙げる

- もとの関数が連続かつ区分的に C^2 級[2]
  →絶対収束かつ一様収束
- もとの関数が 区分的に C^1 級
  →各点収束（不連続点においては両端の平均値に収束する）

---

[2]区分的に C^k 級とは有限個の点を除いて C^k 級で残りの点では左右の 0〜k 階の微分係数が存在すること をいう

Fourier 解析の利用 - 証明のアイデア

定理．Weyl の等分布定理の言い換え②

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) = \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx$$

- 上の命題を直接示すのは難しい
- 三角関数については、上の式を証明することができそう
- $\psi_{a,b}$ は周期を 1 とする周期関数だから、Fourier 級数展開を行いたい！

Fourier 解析の利用 - 証明のアイデア

証明のアイデア

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) = \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx$$

↑ Fourier の形で足し合わせる

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi kn\gamma) = \int_0^1 \sin(2\pi kx)dx$$

- 下側の式は示せそう
- Fourier 級数の形での足し合わせを行えれば OK

Fourier 解析の利用 - 順序交換に気を配る

「和と極限の順序交換ができるとは限らない」

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k n\gamma) + b_k \sin(2\pi k n\gamma)) \right) \\
&\stackrel{?}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi k n\gamma) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi k n\gamma) \right) \\
&= a_0 \int_0^1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^1 \cos(2\pi k x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^1 \sin(2\pi k x) dx \\
&\stackrel{?}{=} \int_0^1 \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k x) + b_k \sin(2\pi k x)) \right) dx \\
&= \int_0^1 \psi_{a,b}(x) dx = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

「順序交換が成り立つとは限らない...」

以下の流れが成り立てば理想だったのだが...。

- 「?」の順序交換が成り立つためには、絶対収束性と一様収束性があれば十分

  ↓
- これらが成り立つためには「もとの関数が連続かつ区分的に C^2 級」などが言えれば十分

  ↓
- 残念ながら、どう頑張ってもこれらが言える十分条件が満たせない（実際、一様収束性は言えない）

Fourier 解析の利用 - 性質の良い関数で近似しよう

一様収束するような性質の良い関数 $\psi^*_{a,b}$ を用いて、$\psi_{a,b}$ を近似する

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi_{a,b}(n\gamma) &\fallingdotseq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi^*_{a,b}(n\gamma) \\
&= \int_0^1 \psi^*_{a,b}(x)dx \\
&\fallingdotseq \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx
\end{aligned}
$$

正確には、大きいほうから近似する関数 $\psi^+_{a,b}$ と小さいほうから近似する関数 $\psi^-_{a,b}$ を用意して挟み撃ちの原理を行う

Fourier 解析の利用 - 小まとめ

定理．Weyl の等分布定理の言い換え②

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) = \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx$$

この定理を証明するには、結局次を示せばよい

- sin, cos について目標の式が成り立つこと
- 一様収束する近似関数 $\psi_{a,b}^{+}, \psi_{a,b}^{-}$ で挟み撃ちの原理を行うこと

証明の完成 - 三角関数についての証明

補題

γ を無理数とする。任意の整数 $k \neq 0$ に対して以下が成り立つ

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sin\left(2\pi k n \gamma\right) = \int_0^1 \sin\left(2\pi k x\right) dx$$

- 右辺の積分は 0 であるから、結局左辺が 0 に収束することを示せばよい
- 三角関数の和について計算できれば良い
- cos についても同様の議論が成り立つ

証明の完成 - 三角関数についての証明

任意の実数 $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta} = e^{i\theta}\frac{1-e^{iN\theta}}{1-e^{i\theta}} \quad \text{i.e.} \quad \left|\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}\right| = \frac{\left|\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

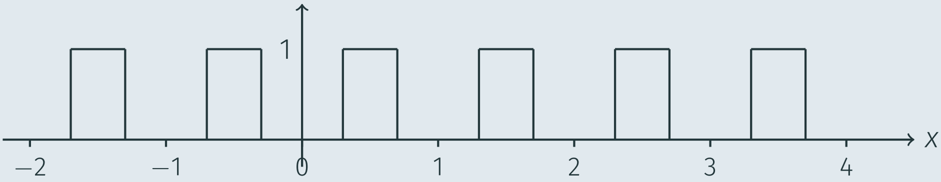
大きさと偏角はわかるから、ここから実部・虚部に分ければ

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)\right|, \left|\sum_{n=1}^{N}\sin(n\theta)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

- $\theta = 2\pi k\gamma$ と取ると、$\gamma \notin \mathbb{Q}$ より $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$
- よって各 $k \neq 0$ で部分和は N に依らず有界であり、従って $\dfrac{1}{N}$ 倍すれば $N \to \infty$ で 0 に収束する

証明の完成 - 性質の良い関数で近似

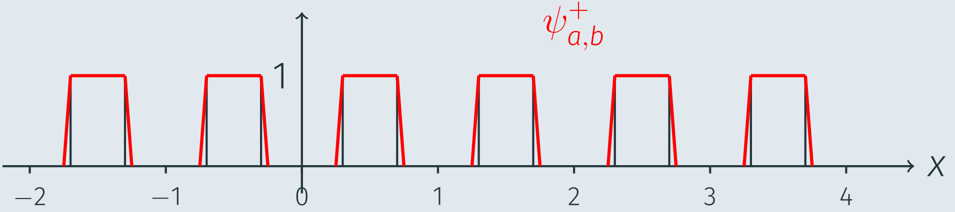
- Fourier 級数の収束条件から連続かつ区分的に C^2 級な関数で近似すればよい
- $\psi_{a,b}$ はすでに区分的に C^2 級である[3]から連続でありさえすればよい

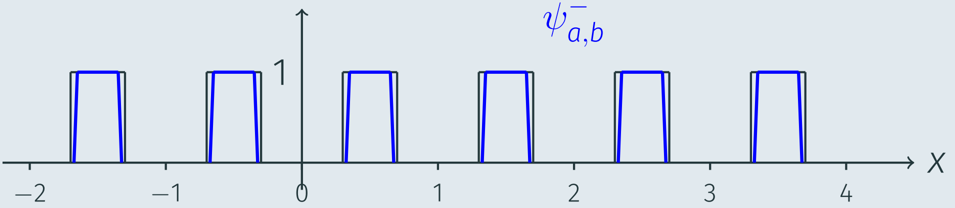


[3] $\psi_{a,b}$ は線分を不連続つなぎ合わせたものであり、各線分は C^2 級であるから区分的に C^2 級

証明の完成 - 性質の良い関数で近似

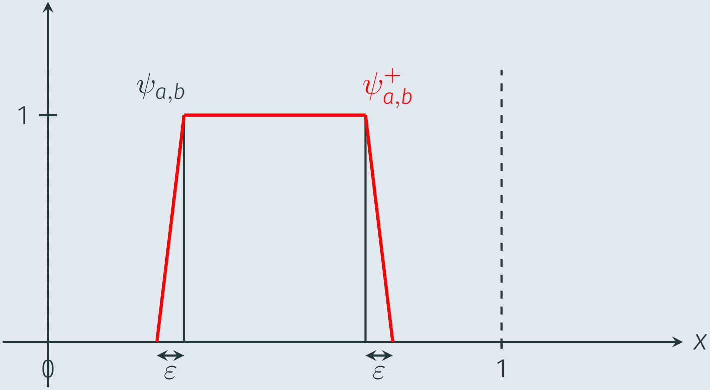
「不連続な部分をほぼ垂直な直線で結ぶ！」





証明の完成 - 性質の良い関数で近似

左右の幅が ε のとき、$\displaystyle\int_0^1 \psi^+_{a,b}dx = \int_0^1 \psi_{a,b}dx + \varepsilon$ が成り立つ



証明の完成 - 不等式評価

S_K を $\psi^+_{a,b}$ の Fourier 第 K 部分和として、ある N_0 が存在して $N \geq N_0$ なら

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) &\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi^+_{a,b}(n\gamma) \\
&= \int_0^1 \psi^+_{a,b}(x)dx + \underbrace{\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi^+_{a,b}(n\gamma) - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_K(n\gamma) \right)}_{\text{一様収束性}} \\
&\quad + \underbrace{\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_K(n\gamma) - \int_0^1 S_K(x)dx \right)}_{\text{三角関数についての結果}} + \underbrace{\left(\int_0^1 S_K(x)dx - \int_0^1 \psi^+_{a,b}(x)dx \right)}_{\text{一様収束性}} \\
&\leq \int_0^1 \psi^+_{a,b}(x)dx + 3\varepsilon = \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx + 4\varepsilon
\end{aligned}
$$

証明の完成 - おしまい！

定理．Weyl の等分布定理の言い換え②

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) = \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx$$

- 以上の議論より $\left| \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) - \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx \right| \leq 4\varepsilon$ であるから
- $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi_{a,b}(n\gamma) = \int_0^1 \psi_{a,b}(x)dx$ となり証明が完了！

応用例

応用例

定理．Weyl の等分布定理

γ を無理数とすると、$0 < a < b < 1$ に対して、以下が成り立つ。

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \# \{ n \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid \{n\gamma\} \in [a, b]\} = b - a$$

この定理の応用例を紹介しよう

- Benford の法則：実数の先頭の桁に関する法則
- モンテカルロ法：コンピュータによる数値計算への応用

Benford の法則 - その一例

定理．Benford の法則[4]

$\log_{10} a \notin \mathbb{Q}$ なる正の実数 a に対して、a^n の先頭の桁 $D \in \{1, \cdots, 9\}$ が d である確率 $P(D = d)$ は $\log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$ となる

- Weyl の等分布定理より $\{n \log_{10} a\}$ は $[0, 1]$ 上に等分布する
- 先頭の桁が d なることは $\log_{10} d \leq \{n \log_{10} a\} < \log_{10}(d + 1)$ なることと同値
- よって、$P(D = d) = \log_{10}(d + 1) - \log_{10} d = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$ となる

例えば、2^n の先頭の桁は $P(D = d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$ で分布する
(先頭の桁が等分布しないのは直感に反するかもしれない)

[4] 正確には、その一例

モンテカルロ法 - 数値計算への応用

命題

$\gamma \notin \mathbb{Q}$ と任意の連続関数 f に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{n\gamma\}) = \int_0^1 f(x)dx$$

- モンテカルロ法は無作為に抽出された乱数を用いて数値計算を行う手法である
  → 乱数列 x_n に対して、$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx$ であることを利用する
- この命題は乱数を用いなくても数値積分を行うことができることを主張している

その他の応用

そのほか、以下のような応用が挙げられる
(Weyl の等分布定理でなくとも Kronecker の稠密定理で事足りるものもある)

- 正方形の中の光線の反射が稠密に、あるいは均等に分布していること
- 無理数の連分数による近似への応用

参考文献

- エリアス・M. スタイン，ラミ・シャカルチ 著，新井仁之・杉本充・高木啓行・千原浩之 訳：『フーリエ解析入門（プリンストン解析学講義 1)』，日本評論社，2007 年