2026.10.07

19

不偏ゲームと Grundy 数

～必勝戦略を思いつく人は何を考えているのか～

めたち (@Metachick_2021)
VRC 数学談話会主催

目次

1|A
様々なゲームの必勝戦略
- 2 山の石取りゲーム
- 毒チョコゲーム
- 3 コイン移動ゲーム

2|B
不偏ゲームと Grundy 数
- 不偏ゲームの定式化
- Grundy 数の定義
- Sprague-Grundy の定理

3|B
超限ゲーム
- 超限ゲームの定義
- 必勝戦略の存在

「組合せゲーム必勝戦略を自力で思いつけるようになろう！」

1 | A

様々なゲームの必勝法

有名な必勝戦略を知る

2山の石取りゲーム

ゲーム 1 : 2 山の石取りゲーム

ルール．2 山の Nim

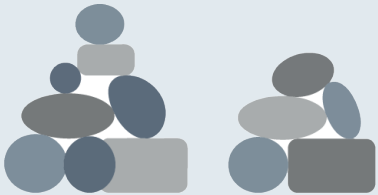
2 つの石が積まれた山があり、二人のプレイヤーは交互に山から石を取り去る。

- 一度に取る石は 1 つの山からのみ
- 自分の手番では、必ず 1 つ以上の石を取らなければならない

上の条件を守ってプレイし、自分の手番で石を取れなくなったプレイヤーの負けとする。さて、このゲームに必勝法はあるだろうか？

初期の石の個数によって、どちらが勝つかが変わる。
例えば...

- 2, 3 → 先手必勝
- 2, 5 → 先手必勝
- 3, 3 → 後手必勝

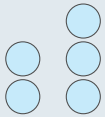


ゲーム1：遷移の具体例

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）



$(2,3)$

ゲーム1：遷移の具体例

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）

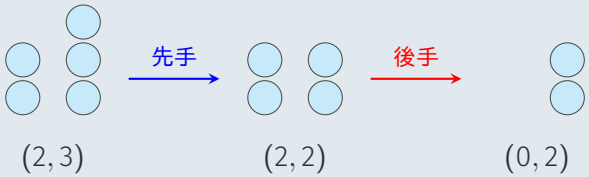


ゲーム1：遷移の具体例

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）

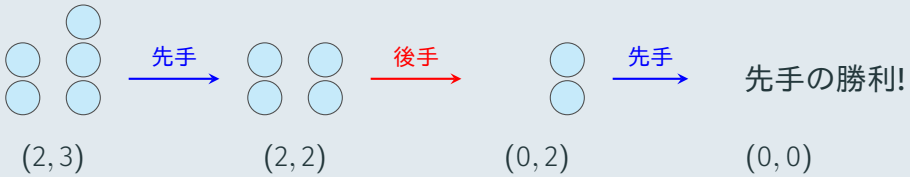


ゲーム1：遷移の具体例

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）

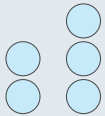


ゲーム1：遷移の具体例（後手が1個取る場合）

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）



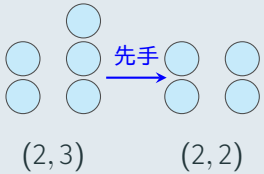
$(2,3)$

ゲーム1：遷移の具体例（後手が1個取る場合）

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）

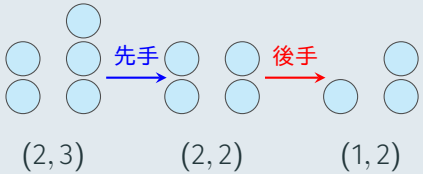


ゲーム1：遷移の具体例（後手が1個取る場合）

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）

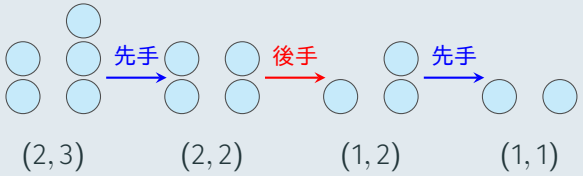


ゲーム1：遷移の具体例（後手が1個取る場合）

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）

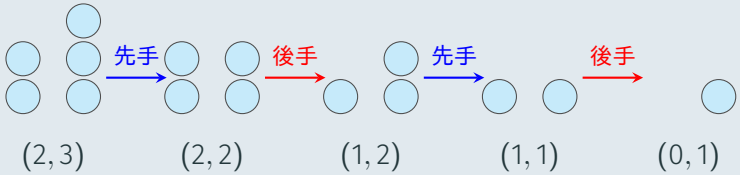


ゲーム1：遷移の具体例（後手が1個取る場合）

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）

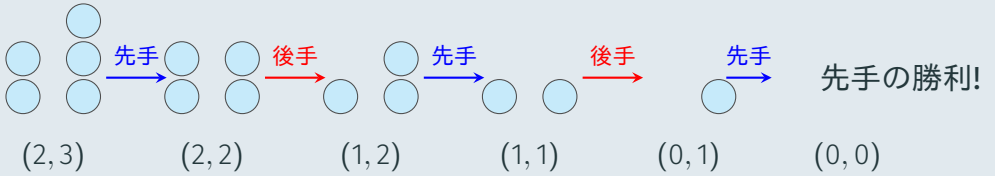


ゲーム1：遷移の具体例（後手が1個取る場合）

例：初期状態 $(2,3)$ からの進行

先手必勝となる $(2,3)$ の初期状態でのプレイ例をみる。

（勘が鋭ければ、必勝戦略がわかるかも）



石取りゲームの必勝法

命題．石取りゲームの必勝判定

初期状態の山の石の個数をそれぞれ x, y 個とするとき、以下が成り立つ：

- $x \neq y$ ならば先手必勝
- $x = y$ ならば後手必勝

石取りゲームの必勝法

命題．石取りゲームの必勝判定

初期状態の山の石の個数をそれぞれ x, y 個とするとき、以下が成り立つ：

- $x \neq y$ ならば先手必勝
- $x = y$ ならば後手必勝

必勝戦略は至ってシンプルである：

「相手の手番で両山の石の個数が等しくなるようにする」

- (2,3) → (2,2) → (1,2) → (1,1) → (0,1) → (0,0)
- (100,200) → (100,100) → (80,100) → (80,80) → (80,25) → (25,25) →…

局面の分類と状態の遷移

ゲームの局面を、両山の石の個数 x, y に注目して 2 つに分類する。

状態の分類

- 状態 E（Equal）：両山の石の個数が等しい（$x = y$）
- 状態 N（Not equal）：両山の石の個数が異なる（$x \neq y$）

石の取り方のルールから、これらの状態間には以下の法則が成り立つ：

1. 終了局面（負け状態）：石が $(0, 0)$ のときに手番が回ってくると行動できず負けとなるが、これは状態 E（$x = y$）に含まれる。
2. 状態 E $\to$ 状態 N：$x = y$ の状態からどちらか片方の山の石を取ると、必ずバランスが崩れる。つまり、どうあがいても必ず状態 N（$x \neq y$）にしか遷移できない。
3. 状態 N $\to$ 状態 E：$x \neq y$ の状態からは、多い方の山から「もう片方との差」の分だけ石を取れば、必ず状態 E（$x = y$）へ遷移させることができる。

勝敗の決定と結論

両者が最善を尽くすと、状態は以下のように推移する。

状態のループと終着点

- 状態 N のプレイヤー：必ず状態 E にできる（最善手）
- 状態 E のプレイヤー：どう打っても必ず状態 N になる

$\Rightarrow$ 状態は $\mathrm{N} \to \mathrm{E} \to \mathrm{N} \to \mathrm{E} \ldots$ と交互にループする。

石は減り続けるため、やがて状態 E である負け局面 $(0, 0)$ に到達するほかない。すなわち、状態 E を押し付けられた側の負けとなる。

【結論】

- 初期状態 $x \neq y$（状態 N）：先手が後手に E を押し付けられる $\Rightarrow$ 先手必勝
- 初期状態 $x = y$（状態 E）：後手が先手に E を押し付けられる $\Rightarrow$ 後手必勝

毒チョコゲーム

ゲーム 2 : 毒チョコゲーム (Chomp)

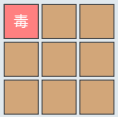
ルール．毒チョコゲーム

左上の 1 マスが「毒入り」である長方形のチョコレートがあり、二人のプレイヤーは交互にチョコを食べる。

- 選んだチョコと、それより右下の領域にあるチョコを全て食べる。
- 自分の手番では、必ず 1 つ以上のチョコを食べなければならない。

上の条件を守ってプレイし、毒入りチョコ（左上）を食べてしまったプレイヤーの負けとする。さて、このゲームに必勝法はあるだろうか？

実は、正方形のときは石取りゲームと
全く同様にして先手必勝となる。



ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 3×3 の場合）

例：正方形 3×3 での必勝進行（2 山の Nim へ帰着）

先手は 1 手目に右下の $(n-1) \times (n-1)$ マスを食べ、以降は後手の手に対称（真似）に対処する。

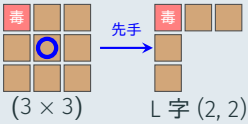


(3×3)

ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 3×3 の場合）

例：正方形 3×3 での必勝進行（2 山の Nim へ帰着）

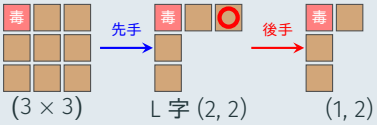
先手は 1 手目に右下の $(n-1) \times (n-1)$ マスを食べ、以降は後手の手に対称（真似）に対処する。



ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 3×3 の場合）

例：正方形 3×3 での必勝進行（2 山の Nim へ帰着）

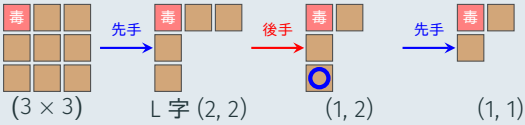
先手は 1 手目に右下の $(n-1) \times (n-1)$ マスを食べ、以降は後手の手に対称（真似）に対処する。



ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 3×3 の場合）

例：正方形 3×3 での必勝進行（2 山の Nim へ帰着）

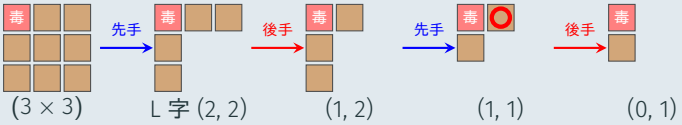
先手は 1 手目に右下の $(n-1) \times (n-1)$ マスを食べ、以降は後手の手に対称（真似）に対処する。



ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 3×3 の場合）

例：正方形 3×3 での必勝進行（2 山の Nim へ帰着）

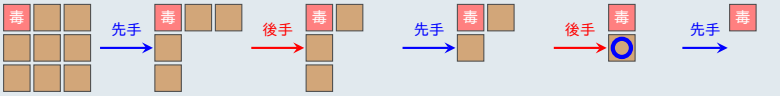
先手は 1 手目に右下の $(n-1) \times (n-1)$ マスを食べ、以降は後手の手に対称（真似）に対処する。



ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 3×3 の場合）

例：正方形 3×3 での必勝進行（2 山の Nim へ帰着）

先手は 1 手目に右下の $(n-1) \times (n-1)$ マスを食べ、以降は後手の手に対称（真似）に対処する。



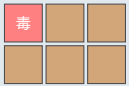
先手勝利!

ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 2×3 の場合）

例：初期状態 3×2 からの進行

先手必勝となる 3×2（横 3 マス、縦 2 マス）の初期状態でのプレイ例をみる。

（選んだマスと、その右下の領域が全て食べられる）

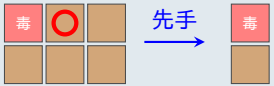


ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 2×3 の場合）

例：初期状態 3×2 からの進行

先手必勝となる 3×2（横 3 マス、縦 2 マス）の初期状態でのプレイ例をみる。

（選んだマスと、その右下の領域が全て食べられる）



ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 2×3 の場合）

例：初期状態 3×2 からの進行

先手必勝となる 3×2（横 3 マス、縦 2 マス）の初期状態でのプレイ例をみる。

（選んだマスと、その右下の領域が全て食べられる）



ゲーム 2：遷移の具体例（正方形 2×3 の場合）

例：初期状態 3×2 からの進行

先手必勝となる 3×2（横 3 マス、縦 2 マス）の初期状態でのプレイ例をみる。

（選んだマスと、その右下の領域が全て食べられる）



先手の負け!
（＝後手の勝利）

毒チョコゲームの必勝判定

命題．毒チョコゲームの必勝判定

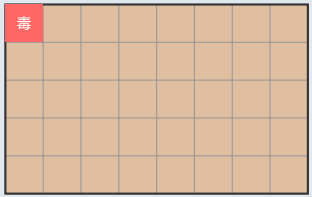
毒チョコゲームは、1×1 のサイズを除いてすべてのケースで先手必勝である！

- 石取りゲームのように「相手のターンで左右対称にする」といった、具体的な必勝戦略は一般の $m \times n$ においては現在も未解決のままである。
- にも関わらず、先手必勝という事実だけは戦略盗用論法と呼ばれる鮮やかな背理法によって証明されている。

戦略盗用（Strategy Stealing）による証明 1/2

背理法による証明（仮定）

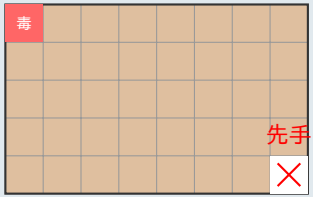
このゲームが「後手必勝である」と仮定して矛盾を導く。
先手は１手目に、「一番右下の角のチョコ１マスだけ」を食べるとする。



戦略盗用（Strategy Stealing）による証明 1/2

背理法による証明（仮定）

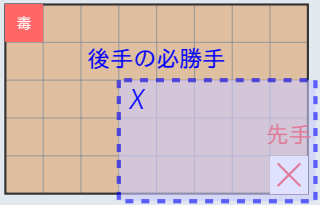
このゲームが「後手必勝である」と仮定して矛盾を導く。
先手は１手目に、「一番右下の角のチョコ１マスだけ」を食べるとする。



戦略盗用（Strategy Stealing）による証明 1/2

背理法による証明（仮定）

このゲームが「後手必勝である」と仮定して矛盾を導く。
先手は１手目に、「一番右下の角のチョコ１マスだけ」を食べるとする。



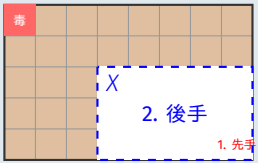
仮定より「後手必勝」なので、後手はあるマス X を選んで必勝局面に持ち込む（＝先手を負けの状態に突き落とす）ことができるはずである。

戦略盗用（Strategy Stealing）による証明 2/2

なら最初からそうすれば良いじゃない

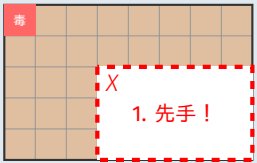
X を選ぶと「右下の角」も同時に消えるため、以下の 2 つは全く同じ局面になる！

【仮定】先手：右下 → 後手：X



=

【盗用】先手が最初から X！

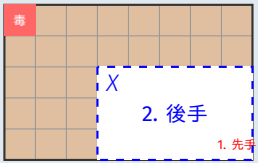


戦略盗用（Strategy Stealing）による証明 2/2

なら最初からそうすれば良いじゃない

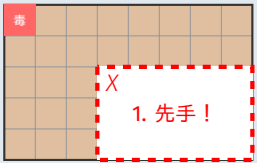
X を選ぶと「右下の角」も同時に消えるため、以下の 2 つは全く同じ局面になる！

【仮定】先手：右下 → 後手：X





【盗用】先手が最初から X！



結論

先手が最初から X を打てば、後手の必勝局面をそのまま盗用できる！

⇒ 後手必勝の仮定と矛盾。ゆえに先手必勝である。

3 コイン移動ゲーム

ゲーム 3 : 3 コイン移動ゲーム

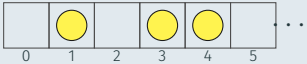
ルール．3 コイン移動ゲーム

一直線上にマス $0, 1, 2, \ldots$ を用意し、3 枚のコインを異なるマスに置く。
2 人のプレイヤーは交互に以下のルールでコインを移動させる。

- コインを 1 枚選び、左に 1 マスまたは 2 マス移動させる。
- コイン同士が同じマスに入ったり、追い越したりすることはできない。

自分の手番で、移動できなくなったプレイヤーの負け。

不変量に着目すると必勝法が見えてくる。



ゲーム 3 : 遷移の具体例

例：初期状態 $(0, 2, 4)$ からの進行

左から順にコインの位置を (x, y, z) とする。
先手は常に $x + y + 2z \equiv 2 \pmod 3$ となるように動かすと必勝となる！



$(0, 2, 4)$
$0 + 2 + 8 \equiv 1$

ゲーム 3：遷移の具体例

例：初期状態 $(0, 2, 4)$ からの進行

左から順にコインの位置を (x, y, z) とする。
先手は常に $x + y + 2z \equiv 2 \pmod 3$ となるように動かすと必勝となる！



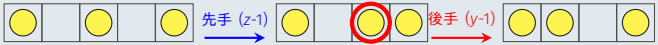
$(0, 2, 4)$
$0 + 2 + 8 \equiv 1$

$(0, 2, 3)$
$0 + 2 + 6 \equiv 2$

ゲーム 3：遷移の具体例

例：初期状態 $(0, 2, 4)$ からの進行

左から順にコインの位置を (x, y, z) とする。
先手は常に $x + y + 2z \equiv 2 \pmod 3$ となるように動かすと必勝となる！



$(0, 2, 4)$
$0 + 2 + 8 \equiv 1$

$(0, 2, 3)$
$0 + 2 + 6 \equiv 2$

$(0, 1, 3)$
$0 + 1 + 6 \equiv 1$

ゲーム 3：遷移の具体例

例：初期状態 $(0, 2, 4)$ からの進行

左から順にコインの位置を (x, y, z) とする。
先手は常に $x + y + 2z \equiv 2 \pmod 3$ となるように動かすと必勝となる！



$(0, 2, 4)$
$0 + 2 + 8 \equiv 1$

$(0, 2, 3)$
$0 + 2 + 6 \equiv 2$

$(0, 1, 3)$
$0 + 1 + 6 \equiv 1$

$(0, 1, 2)$
$0 + 1 + 4 \equiv 2$

先手勝利!

3 コイン移動ゲームの必勝判定

命題. 評価関数による必勝局面の判定

コインの位置を左から順に x, y, z とし、評価関数を $V(x, y, z) = x + y + 2z$ と定義する。このとき、$V(x, y, z) \equiv 2 \pmod 3$ となる局面は後手必勝である！

- 負け状態は $(0, 1, 2)$ であり、このとき $V(0, 1, 2) = 0 + 1 + 2 \times 2 = 5 \equiv 2 \pmod 3$ となる。
- このゲームにおいて、以下の 2 つを示せば、これが必勝条件であることが完全に証明される。
  1. $V \equiv 2$ からのいかなる操作も、必ず $V \not\equiv 2$ に遷移する。
  2. $V \not\equiv 2$ からは、適切な操作で必ず $V \equiv 2$ に遷移できる。

必勝条件の証明 1/2 : $V \equiv 2$ からの遷移は必ず崩れる

操作による $V(x,y,z) = x + y + 2z$ の変化量

プレイヤーが選んだコインを「左に k マス ($k \in \{1,2\}$)」動かしたときの、V の変化を確認する。

- x または y を動かした場合：
  $k = 1$ のとき $\Delta V \equiv +2 \pmod 3$
  $k = 2$ のとき $\Delta V \equiv +1 \pmod 3$
- z を動かした場合：
  $k = 1$ のとき $\Delta V \equiv +1 \pmod 3$
  $k = 2$ のとき $\Delta V \equiv +2 \pmod 3$

必勝条件の証明 2/2 : $V \not\equiv 2$ からの復帰

不利な局面からは、常に必勝局面に持ち込める

$V \equiv 0, 1 \pmod 3$ から $V \equiv 2$ に遷移させる手が常に少なくとも 1 つ存在する。

【$V \equiv 1 \pmod 3$ から $V \equiv 2 \pmod 3$ へ遷移したいとき】[1]
可能な操作が一つもない条件は以下の通り。この制約を満たす (x, y, z) の組は
$(0, 1, 2), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 4)$ の 4 通りであるが、これらはすべて $V \not\equiv 1$ でない！

- x を 2 減らせない $\Rightarrow x \leq 1$
- y を 2 減らせない $\Rightarrow y - 2 \leq x \Rightarrow y \leq x + 2$
- z を 1 減らせない $\Rightarrow z - 1 \leq y \Rightarrow z \leq y + 1$

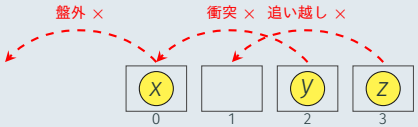
[1] $V \equiv 0 \pmod 3$ から $V \equiv 2 \pmod 3$ への遷移の存在についても同様

補足：なぜ単純な $x+y+z$ ではダメなのか？

疑問．評価関数を重みなしの $S(x,y,z)=x+y+z$ にしてはダメ？

終了状態 $(0,1,2)$ は $S=3\equiv 0 \pmod 3$ となるため、
一見すると $S\equiv 0 \pmod 3$ を保つ戦略で勝てるように思える。

例えば、局面 $S\equiv 2 \pmod 3$ である $(0,2,3)$ から $S\equiv 0$ へ遷移できない。
（どのコインも左に 2 マス動かすことはできない）



- したがって、$x+y+z$ は局面の価値を正しく表す評価関数として破綻している。
- 一方、$x+y+2z$ で評価すると正しく判定できる。

3 つのゲームのまとめ

ある程度の有名な定石がある

ゲーム 1：石取りゲーム

「$x = y$ 判定」+「真似」

・評価関数 $x - y$ を
考えてるとも言える

ゲーム 2：毒チョコ

「戦略盗用論法」

・具体的な最善手は
未解決問題

ゲーム 3：3 コイン移動

「評価関数」

・重要な量を見抜く
$(x + y + z \pmod 3)$

定番の考え方（典型手法一覧）

名前	説明
真似っこ（対称性）	相手の手に対して点対称・線対称な手を打ち続ける
戦略盗用論法	「もし後手に勝ち筋があるなら…」と仮定して矛盾を導く
評価関数	うまい量によって、局面の勝勢を数値化する
周期性の発見	小さなケースでの実験から規則性・周期を見つける
ゲームの分解	独立な小さいゲームに分解して考える

定番の考え方（典型手法一覧）

さらに、「必勝状態」を定義して以下を示す手法は証明において最も重要かつ典型的であると言える。

- 必勝状態からある手が存在して必敗状態へ遷移すること
- 必敗状態からの任意の手は必勝状態へと遷移すること

2 | B

不偏ゲームと Grundy 数

最強の評価関数を理解する

不偏ゲームの定式化

「ところで、ゲームって何？」

「ところで、ゲームって何？」

- 本発表で扱う「ゲーム」を改めて定式化しておこう
- 今日は特に不偏ゲームについて考える

不偏ゲームの定義

定義．不偏ゲーム

組合せゲームのうち、以下の条件を満たすものを不偏ゲームと呼ぶ。

1. 2 人のプレイヤーが交互に手を行う。
2. 完全情報ゲームである。すなわち、偶然の要素が存在せず、両プレイヤーがゲームの全情報を共有している。
3. どの状態においても、遷移可能な状態の集合が手番のプレイヤーによらず完全に同一である。
4. 各手番での遷移可能な状態の集合が有限である。
5. 有限回の操作でゲームが終了する。
6. 正規形式に従う。すなわち、自分の手番で合法手が存在しない（終端状態に到達した）プレイヤーを負けとし、最後の合法手を行ったプレイヤーを勝ちとする。

不偏ゲームでないものの具体例

「以下の例は不偏ゲームではない」

- オセロ：合法手がない場合にパスをするため、正規形式とは異なる（ルール 1 に反する）
- すごろく：サイコロが偶然の要素となる（ルール 2 に反する）
- ○ × ゲーム：置けるものがプレイヤーによって異なる（一方が○、もう一方が × を置く）ため、不偏ゲームではない（ルール 3 に反する）
- 将棋：「千日手[2]」が存在するため、有限回の操作で終わらない（ルール 5 に反する）

[2]豆知識：千日手のルールそのものに数学的な抜け道があって、無限に続けられてしまうことが発見され、1983 年にルール改定されたという過去がある

勝敗が必ず決まる

「不偏ゲームには引き分けが存在しない！」

- 理由 1：必ずゲームが終了する
  - 有限回の操作で終わるため、無限ループで引き分けになることがない
- 理由 2：勝敗のルールが完全である
  - 手が打てなくなった方を「負け」、最後の手を打った方を「勝ち」とするため、勝敗がつかない状態が存在しない

ゲームのグラフ表現

「不偏ゲームの進行は有向グラフ（DAG）で捉えられる」

定義．ゲームのグラフ

2 人のプレイヤーが交互に手を行う組合せゲームに対し、以下のように定まる有向グラフ $G = (V, E)$ をゲームのグラフという。

- 頂点集合 V：ゲームの起こり得るすべての局面の集合
- 有向辺集合 E：1 手で行える合法な状態遷移（$u \to v$）
- 終端状態：出次数が 0 である頂点 $u \in V$（遷移先が存在しない局面）

- 有限性より同じ局面に戻るループは存在しないため、このグラフは DAG（有向非巡回グラフ）となる。

Grundy数の定義

最小除外数

定義．最小除外数（mex : Minimum EXcluded value）

非負整数の有限部分集合 $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、$\mathrm{mex}(S)$ を「S に含まれない最小の非負整数」と定義する。

$$\mathrm{mex}(S) = \min\{x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid x \notin S\}$$

具体例：

- $\mathrm{mex}(\{0,1,3\}) = 2$　（0, 1 は存在するが 2 が欠けている）
- $\mathrm{mex}(\{1,2,3\}) = 0$　（最小の非負整数である 0 が含まれていない）
- $\mathrm{mex}(\emptyset) = 0$　（空集合の場合は 0 となる）

Grundy 数の定義

定義．Grundy 数

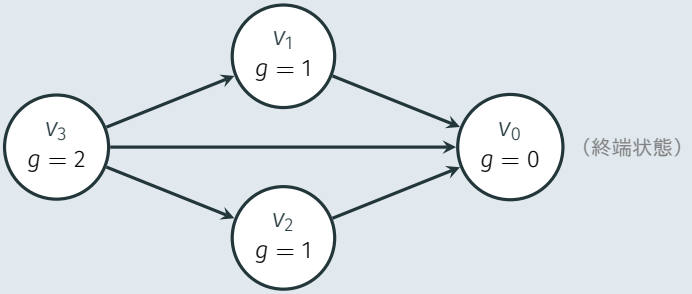
グラフ $G = (V, E)$ で表される不偏ゲームの各頂点 $u \in V$ に対し、Grundy 数 $g(u)$ を以下のように再帰的に定義する。

$$g(u) = \mathrm{mex}\left(\{g(v) \mid u \to v\}\right)$$

- 遷移先が存在しない終端状態 u では $\{g(v) \mid u \to v\} = \emptyset$ となり、Grundy 数は $g(u) = \mathrm{mex}(\emptyset) = 0$ である。
- ゲームを表すグラフが DAG であるから、この定義は well-defined となる。

Grundy 数の具体例

「終端状態から逆順に $g(u)$ を決定していく」



- $g(v_0) = \mathrm{mex}(\emptyset) = 0$
- $g(v_1) = \mathrm{mex}(\{g(v_0)\}) = \mathrm{mex}(\{0\}) = 1$　（$g(v_2)$ も同様）
- $g(v_3) = \mathrm{mex}(\{g(v_0), g(v_1), g(v_2)\}) = \mathrm{mex}(\{0, 1\}) = 2$

Grundy 数、何者なんですか？

「Grundy数を見ると必勝判定ができる！」

Grundy 数と必勝状態の同値性

命題．Grundy 数と必勝状態の同値性

$G = (V, E)$ で表される不偏ゲームの任意の局面 $u \in V$ について、以下が成り立つ。

1. $g(u) = 0 \iff u$ は P-position（後手必勝）である。
2. $g(u) > 0 \iff u$ は N-position（先手必勝）である。

- **P-position**: その局面を初期状態として後手必勝（Previous player win）
- **N-position**: その局面を初期状態として先手必勝（Next player win）

$\Longrightarrow$ Grundy 数を計算するだけで、局面の勝敗判定が完結する！

Grundy 数と必勝状態の同値性（証明）

証明：$g(u) = 0 \iff$ P-position を示せば十分。トポロジカル順序の逆順による帰納法で示す。

1. 終端状態 u：
   - 定義より $g(u) = 0$。合法手が存在せず負けとなるため、u は P-position。
2. 非終端状態 u：
   - すべての直後状態 $u \to v$ で主張が成立していると仮定する。
   - $g(u) = 0$ のとき：mex の定義より、任意の v で $g(v) > 0$（N-position）。
     どう操作しても相手に N-position を渡してしまうため、u は P-position。
   - $g(u) > 0$ のとき：mex の定義より、$g(v) = 0$（P-position）となる v が少なくとも 1 つ存在。相手に P-position を押し付ける手が打てるため、u は N-position。

以上より、すべての局面 $u \in V$ について題意が示された。 □

Sprague-Grundy の定理

ゲームの和（Sum of Games）

定義．ゲームの和

独立した N 個の不偏ゲーム $G_1, G_2, \ldots, G_N$ に対し、プレイヤーが自分の手番でいずれか 1 つのゲームを選んで合法手を進めるゲームを、ゲームの和 $G_1 + G_2 + \cdots + G_N$ と呼ぶ。（複数のゲームを並行して遊ぶことを表している。）

具体例：2 山の石取りゲーム（Nim）

- 2 つの山（例：A 山、B 山）がある石取りゲームは、
- 「A 山だけの石取りゲーム」と「B 山だけの石取りゲーム」の和とみなせる。
- 手番のプレイヤーは「どちらの山から石を取るか」を選んで 1 手進める。

Sprague-Grundy の定理

定理．Sprague-Grundy の定理（SG 定理）

N 個の独立な不偏ゲームの現在の状態をそれぞれ $u_1, u_2, \ldots, u_N$ とする。和ゲーム全体の Grundy 数 $g(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ は、各独立なゲームの Grundy 数 の XOR[3]に等しい。

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_N) = g(u_1) \oplus g(u_2) \oplus \cdots \oplus g(u_N)$$

- どれほど複雑な不偏ゲームの組み合わせであっても、
- 各ゲームの Grundy 数さえ分かれば、XOR で一瞬で全体を評価できる！

[3]bit 単位排他的論理和、2 進数展開して mod2 での足し算をすることに相当する

石取りゲーム（Nim）への応用

命題．一般の石取りゲームの勝敗判定法

山 i に積まれている石の個数を A_i とするとき、

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N \neq 0 \iff \text{先手必勝（N-position）}$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N = 0 \iff \text{後手必勝（P-position）}$$

1. 1 つの山の Grundy 数

- 石が x 個ある 1 つの山から自由な個数の石を取れる場合、
- 遷移先は石が $0, 1, \ldots, x-1$ 個の状態 $\implies g(x) = \mathrm{mex}(\{0, 1, \ldots, x-1\}) = x$

2. N 個の山の 石取りゲーム における勝敗判定

- 各山の石の数を $A_1, A_2, \ldots, A_N$ とすると、SG 定理より全体の Grundy 数は：

$$g(A_1, A_2, \ldots, A_N) = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N$$

具体例：XOR（Nim-sum）の計算と勝敗判定

例題：3 つの山（石の数が 3 個, 5 個, 7 個）の勝敗

各山の石の数の XOR 和 $3 \oplus 5 \oplus 7$ を計算して勝敗を判定する。

2 進数に変換して各桁ごとに XOR を計算：

$$
\begin{array}{rcll}
A_1 = 3 & : & \mathtt{0\ 1\ 1} & \\
A_2 = 5 & : & \mathtt{1\ 0\ 1} & \\
\oplus)\ A_3 = 7 & : & \mathtt{1\ 1\ 1} & \\
\hline
\text{XOR 和} & : & \mathtt{0\ 0\ 1} & = 1 \neq 0
\end{array}
$$

- XOR 和が $1 \neq 0$ なので、この局面は 先手必勝（N-position）。
- 必勝手（XOR 和を 0 にする手）：
  - 7 個の山から 1 個取って 6 個（110）にすると、$3 \oplus 5 \oplus 6 = 0$ となり、相手に P-position を渡せる。

伏線回収：2 山の石取りゲーム

序盤に登場した「2 山の石取りゲーム」に SG 定理（$g = x \oplus y$）をあてはめると：

XOR（$\oplus$）の性質と必勝判定

同じ値どうしの XOR は必ず 0 になる（$x \oplus y = 0 \iff x = y$）ため、

- $x = y$ のとき：$g(x, y) = 0 \implies$ P-position（後手必勝）
- $x \neq y$ のとき：$g(x, y) \neq 0 \implies$ N-position（先手必勝）

つまり、「相手と同じ数にする真似っこ戦略」の正体は、
「相手に常に $g = 0$（P-position）を押し付け続ける操作」だった！

3 | B

超限ゲーム

超限ゲームの定義

超限ゲームの定義

定義．超限ゲーム

不偏ゲームの定義から「各手番での遷移可能な状態の集合が有限である」を除いたものを超限ゲームという。

- 各手番で遷移可能な状態は無限通りあってもよい
- 一方で、ゲーム自体は有限手で終了する必要がある（整礎という）

超限ゲームの定義（厳密には）

定義．超限ゲーム（厳密には）

組合せゲームのうち、以下の条件を満たすものを超限ゲームと呼ぶ。

1. 2 人のプレイヤーが交互に手を行う。
2. 完全情報ゲームである。すなわち、偶然の要素が存在せず、両プレイヤーがゲームの全情報を共有している。
3. どの状態においても、遷移可能な状態の集合が手番のプレイヤーによらず完全に同一である。
4. 有限回の操作でゲームが終了する。
5. 正規形式に従う。すなわち、自分の手番で合法手が存在しない（終端状態に到達した）プレイヤーを負けとし、最後の合法手を行ったプレイヤーを勝ちとする。

具体例：ω-Nim

ルール．ω-Nim

「ω の山」が 1 つがあり、二人のプレイヤーは交互に山を操作する。

- 一度に操作できるのは 1 つの山のみ
- ω の山を選ぶ場合：任意に選んだ非負整数 n について、「n 個の通常の石の山」へ変更する
- 通常の山を選ぶ場合：1 個以上の石を取り去る

自分の手番で操作できなくなったプレイヤーの負けとする。

- 1 山の ω-Nim においては、先手必勝であることがわかる。
- 2 山についても、通常の Nim と同様の議論から後手必勝である。

必勝戦略の存在

超限ゲームの決定性

定理．超限ゲームの決定性

局面の集合 $\mathcal{S}$ は、P-position の集合 P と N-position の集合 N に一意に直和分解される：

$$\mathcal{S} = P \sqcup N \quad (P \cap N = \emptyset)$$

- 手番の選択肢が無限にあっても、この性質は保たれる。
- 無限の選択肢があるのに、必ずどちらかが必勝であることは非自明。

$\rightarrow$ 鍵となるのは「有限手で必ず終了する」という条件（整礎性）。

「有限手で終わる」の数学的意味：整礎性

改めて、局面に順序関係を定義したい。

定義．局面の順序

ゲームの全局面の集合を $\mathcal{S}$、局面 $u \in \mathcal{S}$ から 1 手で遷移可能な局面の集合を $F(u) \subseteq \mathcal{S}$ とする。関係 $<$ を $v < u \iff v \in F(u)$ と定義すると、$<$ は $\mathcal{S}$ 上の半順序となる。

このうえで、「有限手で終わる」をもう少し厳密に表現しよう。

定義．整礎

局面全体の任意の部分集合が極小元を持つとき、そのゲームが整礎であるという。

- 要するに、局面の列が有限回で止まると述べているに過ぎない。
- 整礎性により、数学的帰納法や超限帰納法の強力な拡張である整礎帰納法が使える。

超限ゲームの決定性（証明 1/2）

証明：どちらのプレイヤーも必勝戦略を持たない局面の集合を $S \subseteq \mathcal{S}$ とする。
$S = \emptyset$ を示せば十分。背理法により $S \neq \emptyset$ と仮定する。

1. 極小元 u の抽出：
   - ゲームの整礎性（空でない部分集合は極小元を持つ）より、S には順序 $<$ に関する極小元 $u \in S$ が存在する。
   - 極小性の定義より、u の任意の狭義後続局面 $v \in F(u)$（すなわち $v < u$）について $v \notin S$ となる。
   - したがって、u の直後の局面 v はすべて必勝戦略を持つ（P-position または N-position のいずれかに属する）。

超限ゲームの決定性（証明 2/2）

2. 後続局面による分類と矛盾の導出：
   - $F(u)$ 内に P-position が 1 つでも存在するとき：
     手番のプレイヤーはその P-position へ移動すれば勝てるため、u は N-position。
   - $F(u)$ 内のすべてが N-position（または $F(u) = \emptyset$）のとき：
     どこへ移動しても相手に N-position を渡す（または動かせない）ため、u は P-position。
   - いずれの場合も u は必勝戦略を持つことになり、$u \notin S$ となって $u \in S$ に矛盾する。
3. 結論：
   - したがって $S = \emptyset$ であり、すべての局面がいずれか一方の必勝局面となる。

以上より、すべての局面 $u \in \mathcal{S}$ について題意が示された。 □

まとめ

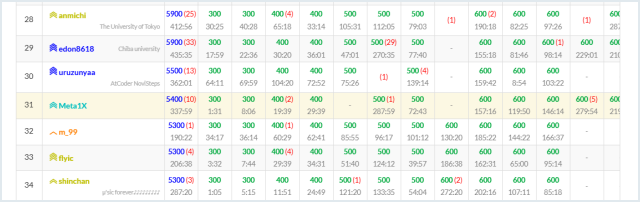
今日、これだけ覚えて帰ってくれれば満足

「基本的には、Grundy 数を見れば良い！」

- 真似っこ、戦略盗用、評価関数などの定番の考察があった
- Grundy 数によって勝敗が判定できた
- Sprague-Grundy の定理によって、複雑なゲームも考察できた
- 超限ゲームにおいても、勝敗の判定ができる

「組合せゲーム 24 題」[4]

- 24 問あります！
- かなり問題の質が高い！！
- 難易度はわりと高いです
- プログラミングを使います
  （僕は 5h で 11 問解けました、挑戦求む）

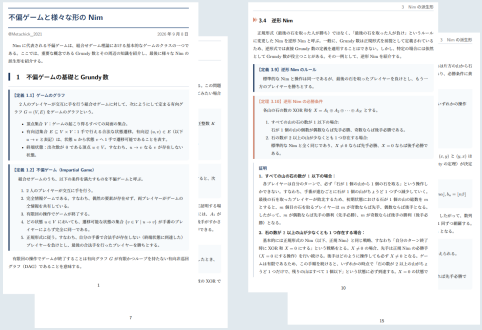


28	anmichi The University of Tokyo	5900 (25) 412:56	300 30:25	300 40:28	400 (4) 65:18	400 33:14	500 105:31	500 112:05	500 79:03	(1)	600 (2) 190:18	600 82:25	600 97:26	(1)	60 28
29	edon8618 Chiba university	5900 (33) 435:35	300 17:59	300 22:36	400 30:20	400 36:01	500 47:01	500 (29) 270:35	500 77:40	-	600 155:18	600 81:46	600 (1) 98:14	600 229:01	60 21
30	uruzunyaa AtCoder NoviSteps	5500 (13) 362:01	300 64:11	300 69:59	400 104:20	400 72:52	500 75:26	(1)	500 (4) 139:14	-	600 159:42	600 8:54	600 103:22	-	
31	Meta1X	5400 (10) 337:59	300 1:31	300 8:06	400 (2) 19:39	400 29:39	-	500 (1) 287:59	500 72:43	-	600 157:16	600 119:50	600 146:14	600 (5) 279:54	60 21
32	m_99	5300 (1) 190:22	300 34:17	300 36:14	400 (1) 60:29	400 62:41	500 85:55	500 96:17	500 101:12	600 130:20	600 185:22	600 144:22	600 166:37	-	
33	flyic	5300 (4) 206:38	300 3:32	300 7:44	400 (4) 29:39	400 34:31	500 51:40	500 124:12	500 39:57	600 186:38	600 162:31	600 65:00	600 95:14	-	
34	shinchan yrtle forever //////////	5300 (3) 287:20	300 1:05	300 5:15	400 11:51	400 24:49	500 (1) 121:20	500 133:35	500 54:04	600 (2) 272:20	600 202:16	600 107:11	600 85:18	-	

[4] https://atcoder.jp/contests/game-24

「不偏ゲームと様々な形の Nim」[5]

- 個数制限付き、
- Nim_K
- Staircase Nim
- Lasker の Nim
- 不偏ゲーム以外の Nim



[5] めたち工房：https://atelier-metachi.vercel.app/articles/articleM016.html

参考文献

1. 安福智明・坂井公・末續鴻輝,『組合せゲーム理論の世界』, 共立出版, 2024
2. めたち,『不偏ゲームと様々な形の Nim』, めたち工房, 2026, https://atelier-metachi.vercel.app/articles/articleM016.html