# 複素代数幾何の下敷き

発表者：もこmoko0059

# 自己紹介

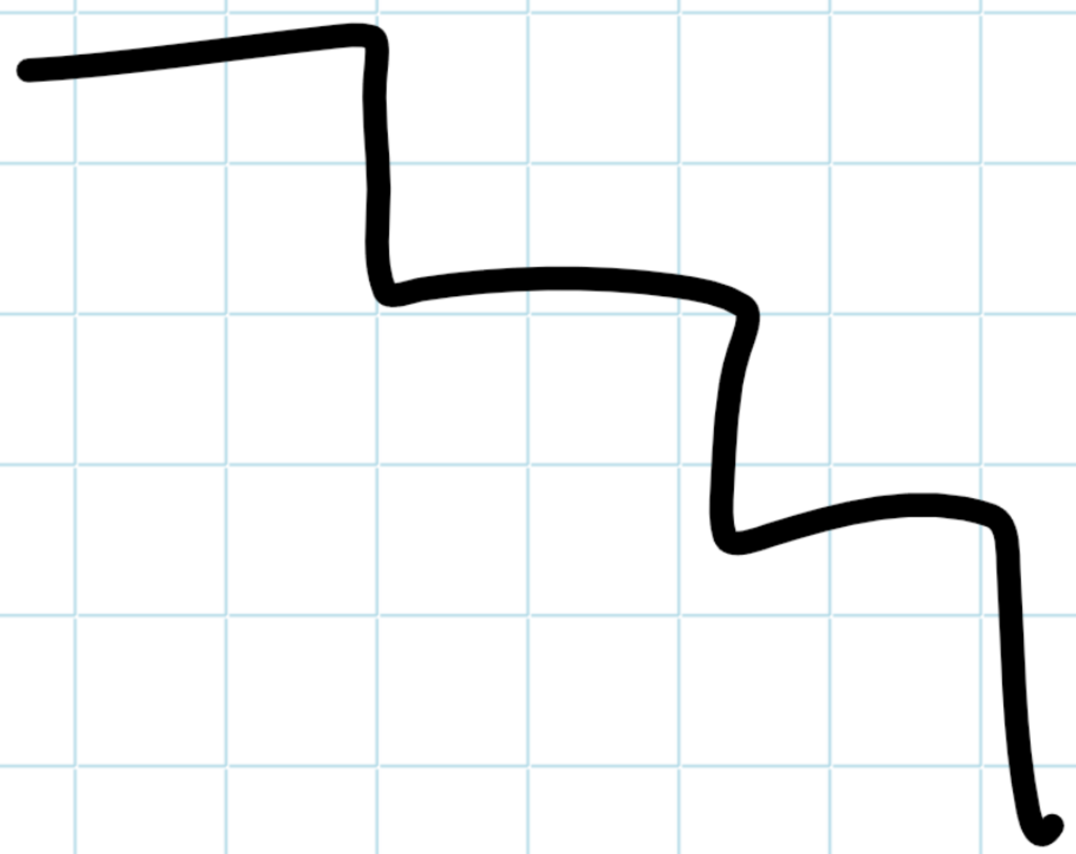
モニ moko059

- グループ「ふんわり算数数学教室」主催
- リアル数学教師
- ポケモンチャンピオンズにお熱
- サルサヴェルデとパクチーの入ったタコスが大好き

# 経緯

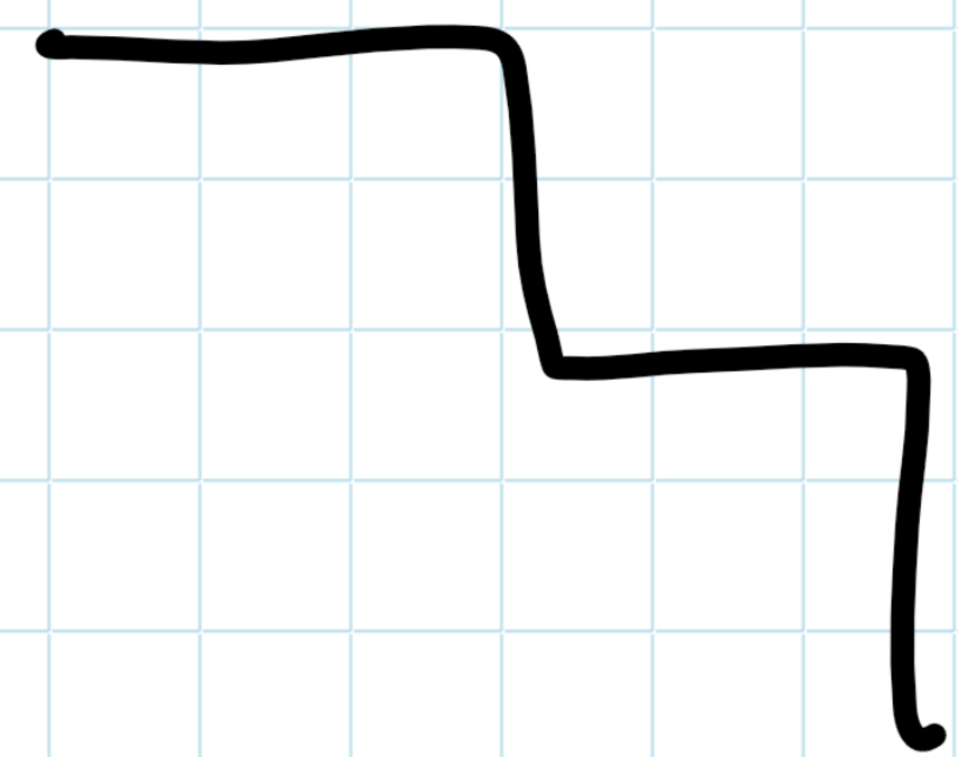
「いつも分かりやすい。手加減無しで試して！」

## 大学院



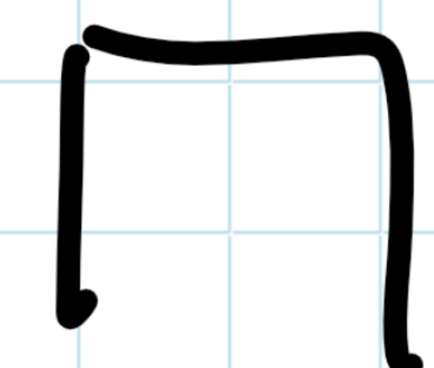
ちょい忘れ
不安

## 大学3～4年



調度よさそう！
D！

## 大学1～3



イベント目的に
B～C？

# 『方程式の解』の解釈

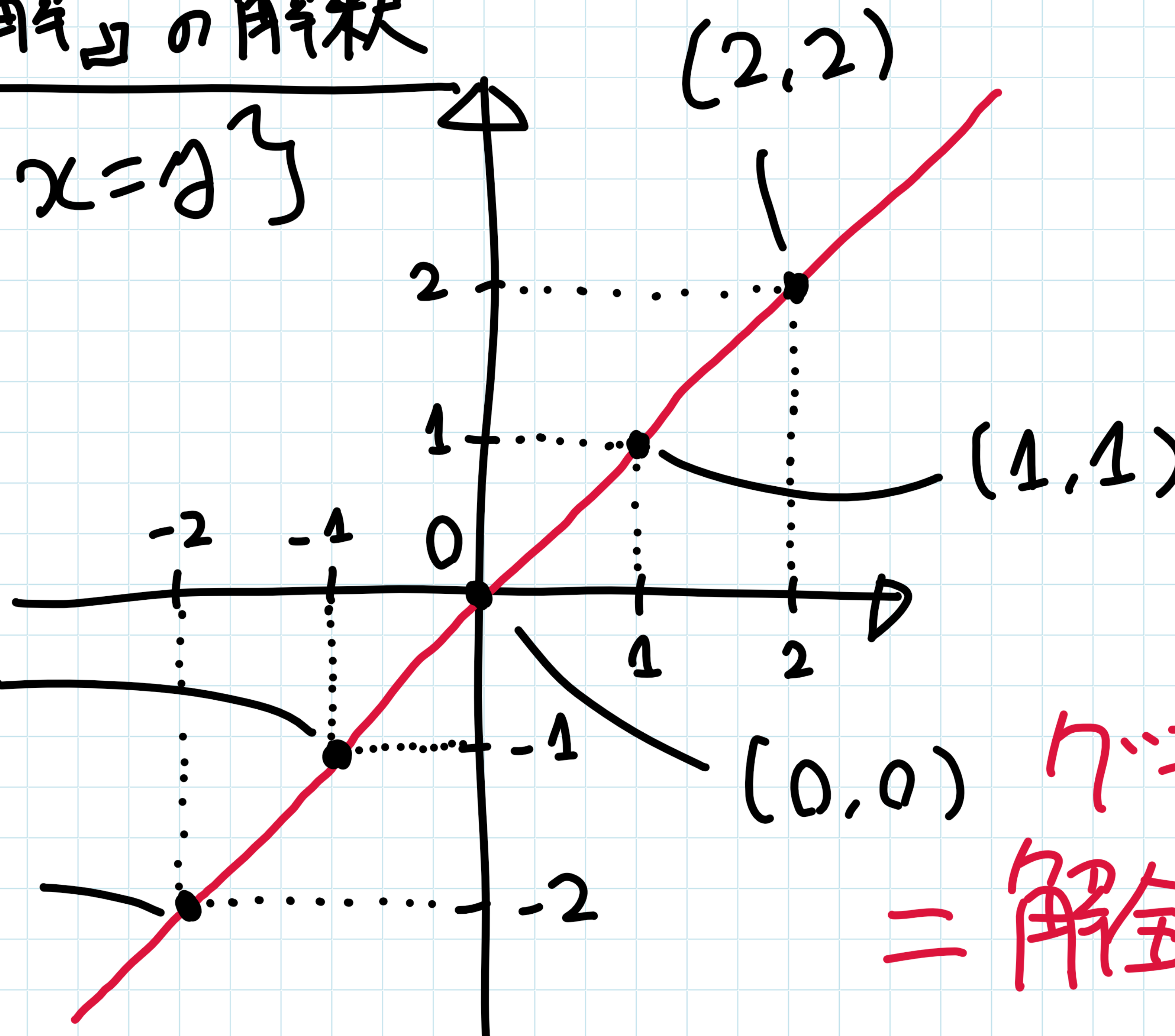
Q. $y=x$ の解は?

$(x,y)=(0,0),(1,1),(2,2),(-1,-1),\cdots$

$\rightsquigarrow \{(x,y) \mid y=x\}$ :解全体!

# 「方程式の解」の解釈

$\{(x,y) \mid x=y\}$




グラフ = 解全体!

# 『方程式の解』の解釈

Q.「解」と「グラフ」の区別の意味は?

〜▷ あまりないのでは?

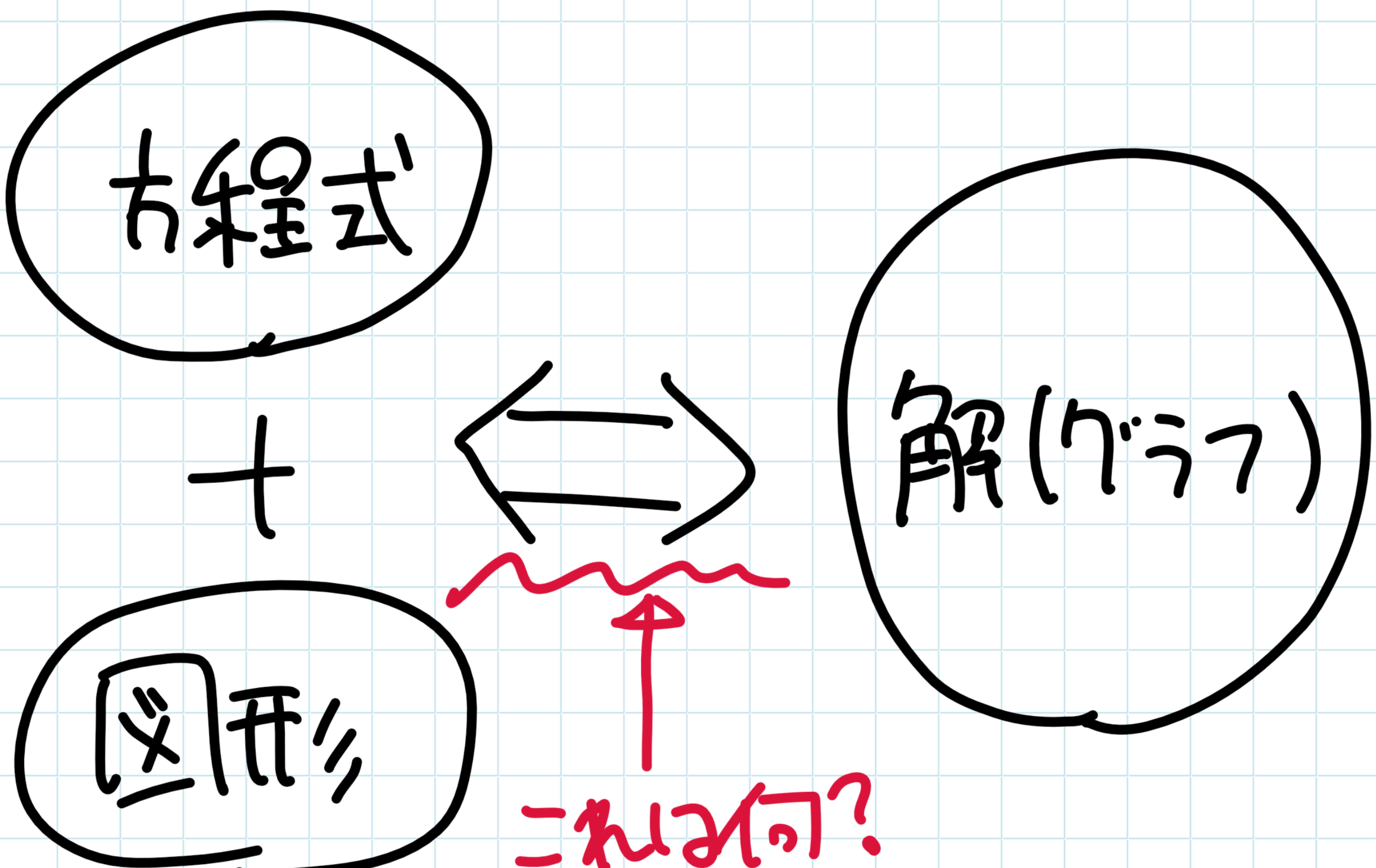
Q. どんなツールが使われてる?

〜▷ グラフとして：図形
解として：方程式

区別がある

# 『方程式の解』の解釈

Q.




「方程式」と「図形」の良い所だけ取りたい!

# 議論の対象（個人的趣味）

$C^0(\mathbb{R})$ ：連続関数 ：位相

$\cup\!\!\!\nparallel$

$C^\infty(\mathbb{R})$ ：滑らかな関数 ：可微分多様体

$\cup\!\!\!\nparallel$

$C^\omega(\mathbb{R})$ ：解析関数 ：実解析

$\cup\!\!\!\nparallel$

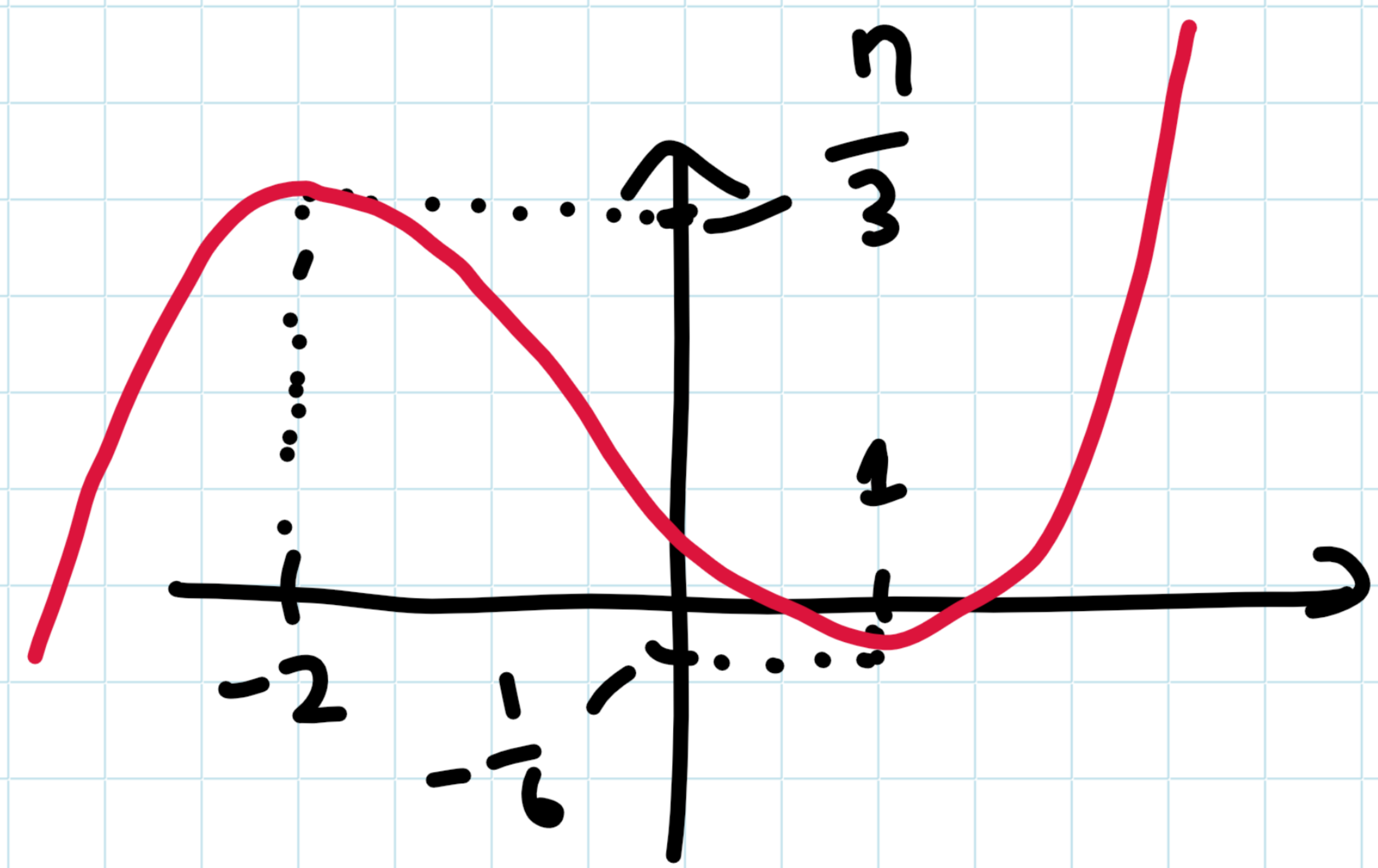
？ ：多項式 ：？

# 候補①：微積分

良い所：各点を議論しやすい

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$



# 候補①：微積分

悪い所：重複が潰れる

例1)

$x-a \neq (x-a)^2$ なのに

$x-a=0 \quad (x-a)^2=0$

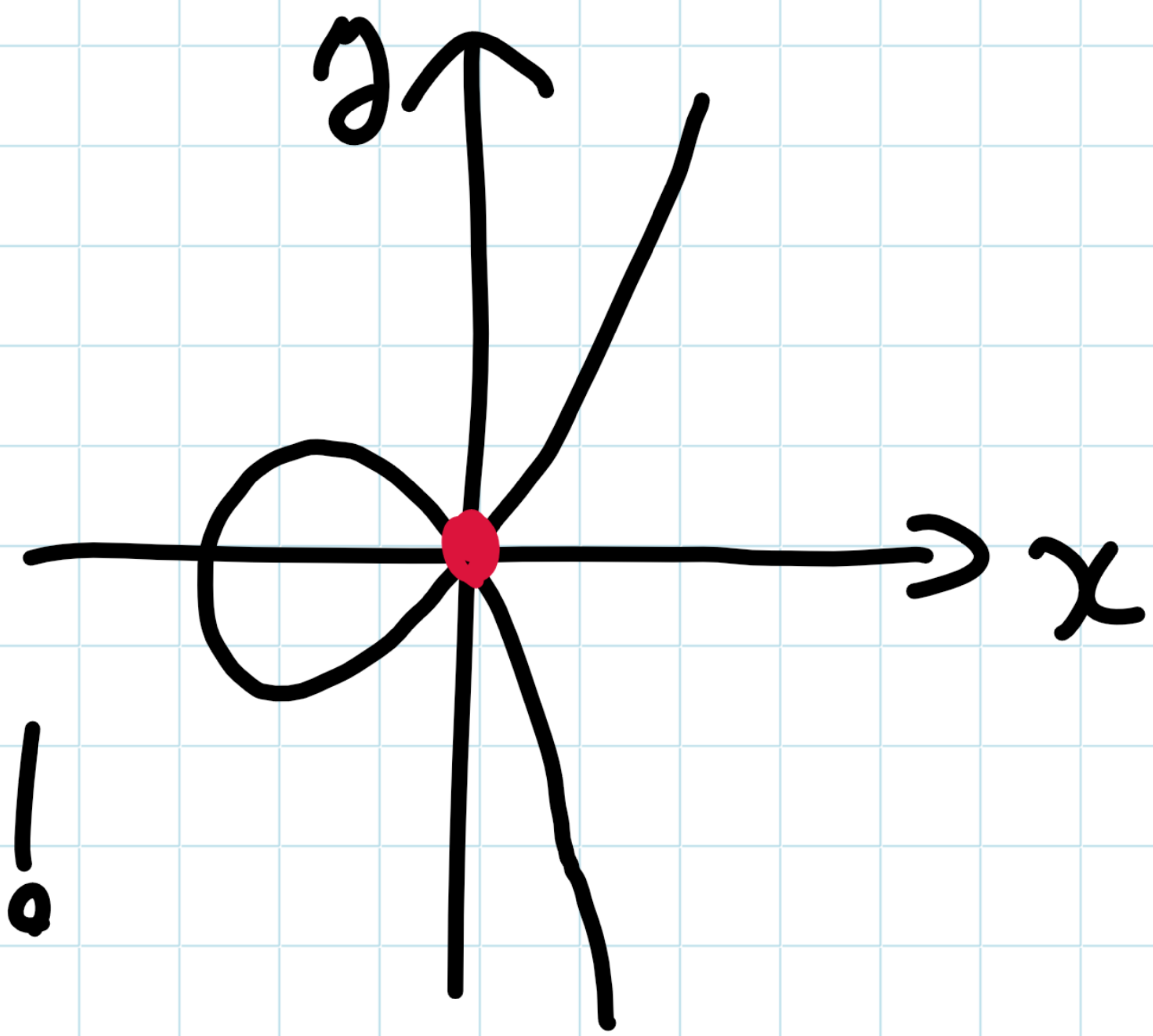
$\rightsquigarrow$ どっちも $x-a=0$！

# 候補①：微積分

悪い所：特異点を詳細に記述できない

例1) $f(x,y)=x^3+x^2-y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$




⇝陰関数表示が取れない！

# 課題

$C^0(\mathbb{R})$ : 連続関数 : 位相

$\supsetneq$

~~$C^\infty(\mathbb{R})$ : 滑らかな関数 : 可微分多様体~~

~~$\supsetneq$~~

~~$C^\omega(\mathbb{R})$ : 解析関数 : 実解析~~

$\supsetneq$

? : 多項式 : ?

Q. 他の道具は?

# 零点集合

$$y = x \qquad\qquad\qquad y - x = 0$$

$$y = x^2 \quad \rightsquigarrow \quad y - x^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad\qquad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$\boxed{\text{多項式} = 0}$

の形にできる

# 零点集合

多項式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ を満たす

$(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ を $f$ の**零点**という。

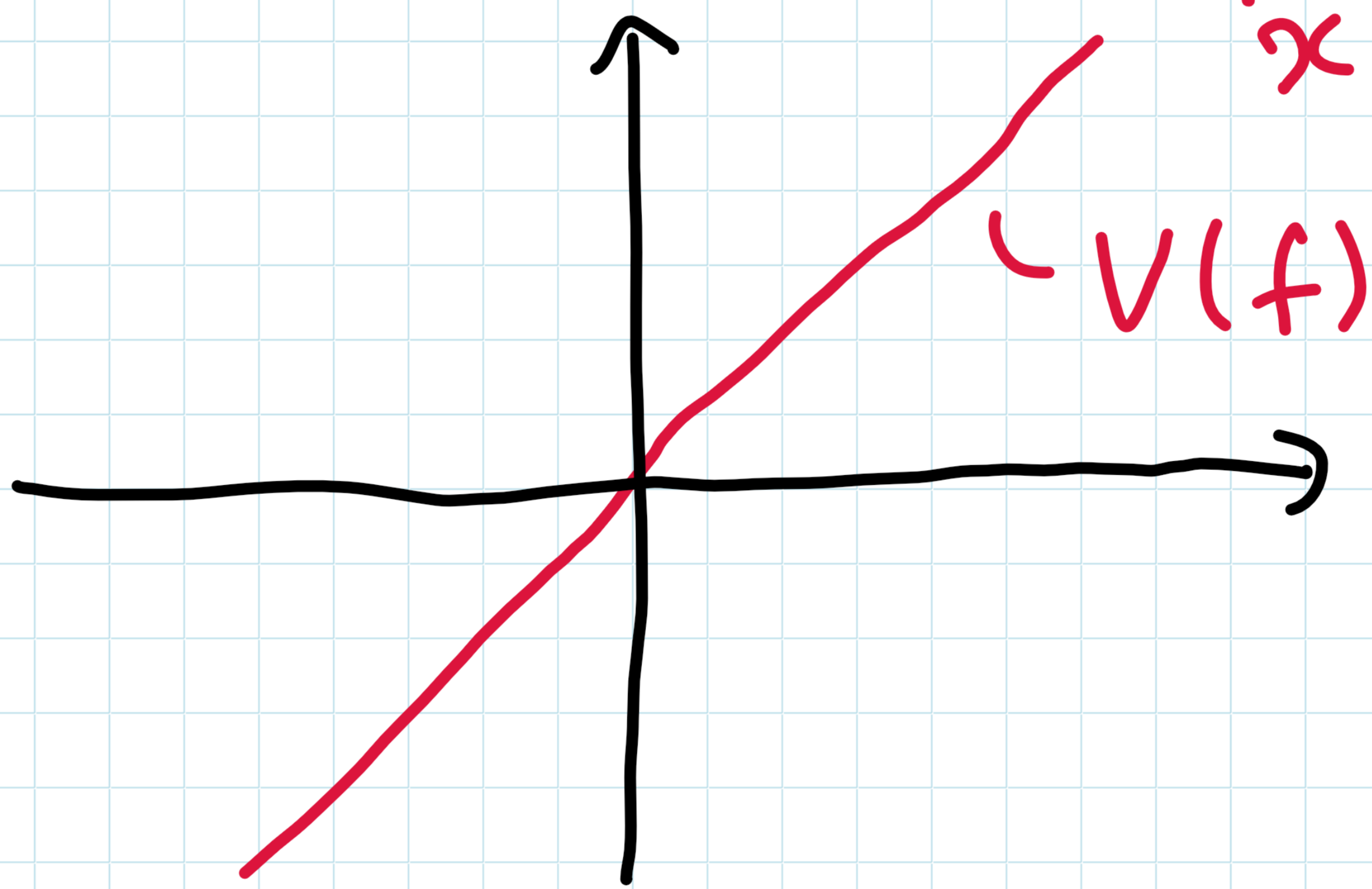
$V(f) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(a_1, \cdots, a_n) = 0\}$ を

$f$ の**零点集合**という。

# 零点集合

$$V(f) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(a_1, \cdots a_n) = 0\}$$

例1) $V(x-y) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{a_1 - a_2}_{x-y\text{に代入}} = 0\}$



# 零点集合

$V(f)$ : 方程式 / 図形 } それぞれでどう動く?

⇝ 方程式 ⇝ 多項式 ⇝ 可換環論

図形 ⇝ ザリスキ位相

# 零点集合

多項式可換環論 $\rightsquigarrow$ ザリスキ位相

(代数)　　(幾何)

# 可換環論による準備

$R$ : ring （可換）

$$R[x] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \forall i,\ a_i \in R \right\}$$

$$R[x_1, x_2] := (R[x_1])[x_2]$$

$$R[x_1, \cdots, x_n] := (R[x_1, \cdots, x_{n-1}])[x_n]$$

# 可換環論による準備

$R[x_1, \cdots, x_n] \supset I$ : イデアル

$V(I)$

$:= \{(a_1, \cdots, a_n) \in R^n \mid \underbrace{\forall f \in I, f(a_1, \cdots, a_n) = 0}\}$

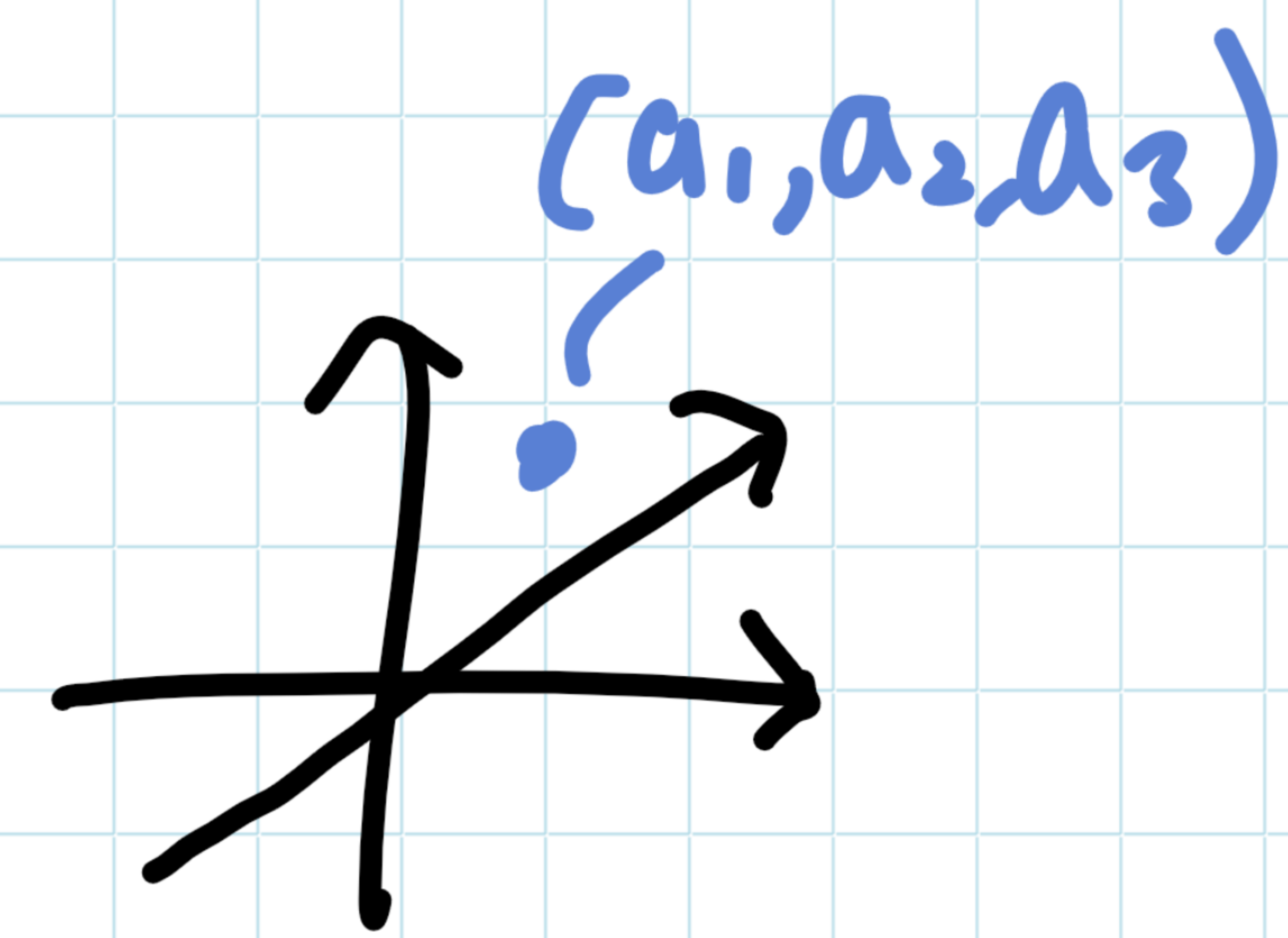
たくさんの元の共通零点集合

# 可換環論による準備(イデアルと図)

例1) $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$

$\mathfrak{m}=(x_1-a_1,x_2-a_2,\dots,x_n-a_n)$ に対し

$V(\mathfrak{m})=\{(a_1,\dots,a_n)\}\subset\mathbb{R}^n$




$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] & & \mathbb{R}^n & \\ & \cup & & \cup & \\ \text{極大イデアル}\rightarrow & \mathfrak{m} & \xleftrightarrow[\text{点に対応!}]{\qquad\qquad} & (a_1,\dots,a_n) & \leftarrow\text{最小要素} \end{array}$$

# 可換環論による準備（イデアルと図）

例) $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ のイデアル

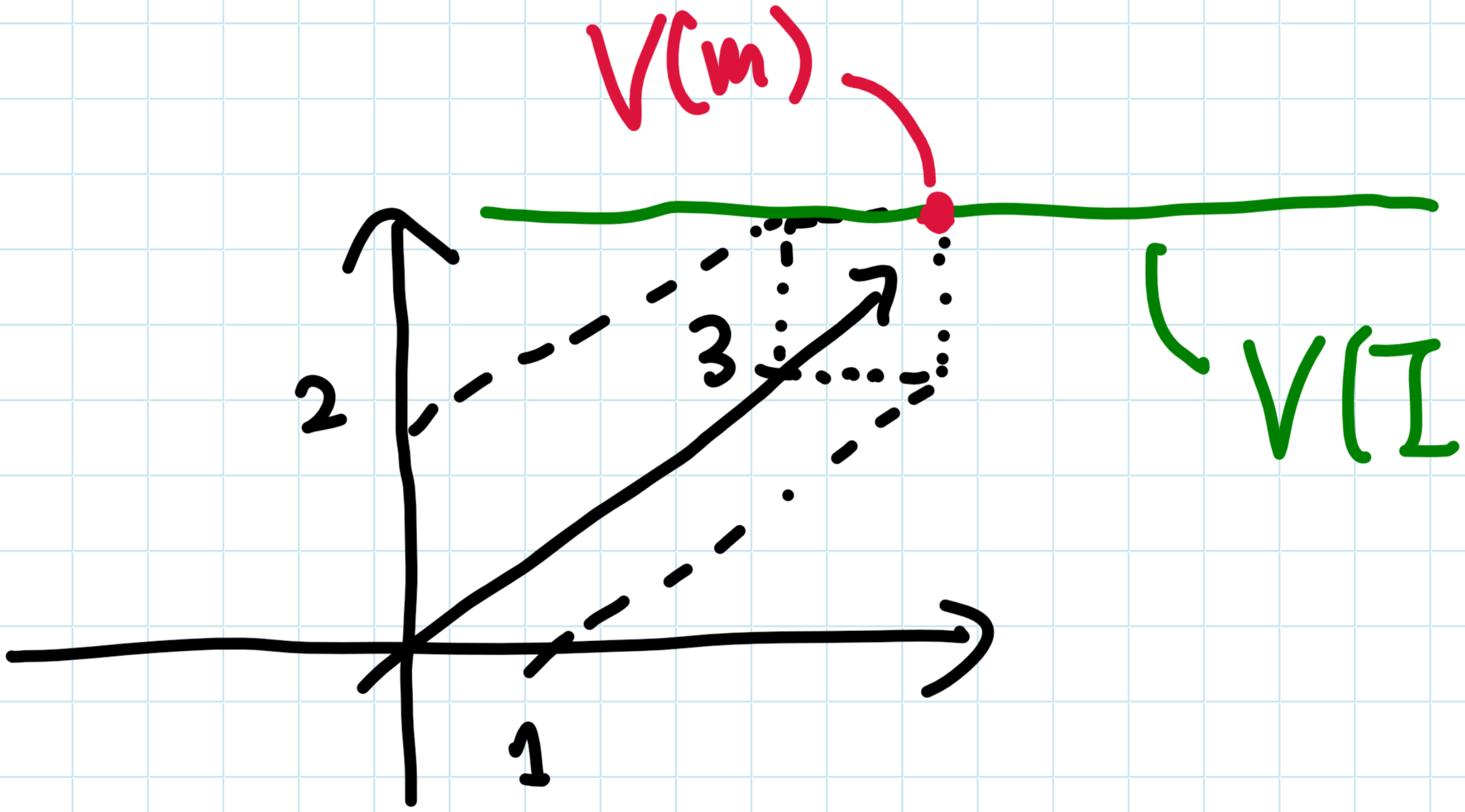
$$\mathfrak{m} = (x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 - 3)$$ に対し、

$$I_1 = (x_2 - 2, x_3 - 3)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m} & \overset{\text{包含が‥}}{\longleftrightarrow} & V(\mathfrak{m}) = \{(1,2,3)\} \\ \cup & \text{ひっくり返る!} & \cap \\ I_1 & & V(I_1) = \{(x,2,3) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

# 可換環論による準備（イデアルと図）

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{m} & & V(\mathfrak{m}) = \{(1,2,3)\} \\
\cup & \longrightarrow & \cap \\
I_1 & & V(I_1) = \{(x,2,3) \mid x \in \mathbb{R}\}
\end{array}
$$




$V(I_1)$ ⇝ 代数 ⇝ 幾何

# 可換環論による準備（イデアルと図）

$$\begin{array}{ccccccc}
(x_1-1,\ x_2-2,\ x_3-3) & \supset & (x_2-2,\ x_3-3) & \supset & (x_3-3) & \supset & (0) \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
\mathfrak{m} & \supset & I_1 & \supset & I_{1,2} & \supset & (0) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
V(\mathfrak{m}) & \subset & V(I_1) & \subset & V(I_{1,2}) & \subset & V(0) \\
\text{‥} & & \text{‥} & & \text{‥} & & \text{‥} \\
\text{点} & & \text{線} & & \text{面} & & \text{空間}
\end{array}$$

# 可換環論による準備（イデアルの列と次元）

Q. イデアルの包含関係はどうなっている？

A. $R[x]$ の「$R$」によって違う！

$\mathbb{Z}[x]$ の $(x^2-2)$ ：これ以上バラせない

$\mathbb{R}[x]$ の $(x^2-2)$ ：$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ なので

$$(x^2-2) \subset (x-\sqrt{2})$$
$$(x^2-2) \subset (x+\sqrt{2})$$

# 可換環論による準備 (イデアルの列と次元)

環$R$について、イデアルの包含による上昇列が高々有限であるとき、$R$は**Noether環**であるという。

$I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n$ ← 有限回で極大

## Thm

- $R$が体 $\Rightarrow$ $R[x]$はNoether
- $R$がNoether $\Rightarrow$ $R[x]$はNoether

# 可換環論による準備（イデアルの列と次元）

$\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 上で

$$\underbrace{(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, \cdots, x_n)}_{\text{幾何的に次元に対応するハズ}}$$

# 可換環論による準備（イデアルの列と次元）

## 問題点

$$(x) \supsetneq (x^2) \supsetneq (x^3) \supsetneq \cdots$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$V(x) = V(x^2) = V(x^3)$$

$\rightsquigarrow$ 零点集合が同じ．減少列では考えにくい！

# 可換環論による準備 (イデアルの列と次元)

Q：何が"悪い"か？

$\rightsquigarrow$ $x=0$ と $x^2=0$ と $x^3=0$

の解が同じなのが悪い

$\longrightarrow$ $x=0$ に限る

$\longrightarrow$ 素イデアルに限ればよい！

# 可換環論による準備 (イデアルの列と次元)

$R$ : ring に対し,

$\dim R = \sup\{ l \mid \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i$は素イデアル$\}$

を$R$の**Krull次元**という。

**Prop**

$\dim(R[x_1, \cdots, x_n]) = n$ .

# 可換環論による準備 (イデアルの列と次元)

$\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ 上で

$$m = (x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 - 3)$$

$$\to \dim(\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/m) = 0 \leftarrow \text{点}$$

$$I_1 = (x_2 - 2, x_3 - 3)$$

$$\to \dim(\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/I_1) = 1 \leftarrow \text{線}$$

$$I_{1,2} = (x_3 - 3)$$

$$\to \dim(\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/I_{1,2}) = 2 \leftarrow \text{面}$$

# 可換環論による準備 (イデアルの列と次元)

$$\dim(V(\mathfrak{m})) := \dim(\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/\mathfrak{m}) = 0$$

$$\dim(V(I_1)) := \dim(\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/I_1) = 1$$

$$\dim(V(I_{1,2})) := \dim(\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/I_{1,2}) = 2$$

$$\dim(V((0))) := \dim(\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/(0)) = 3$$

と定義すれば直感どおり!

# 可換環論による準備 (イデアルの列と次元)

Q. $\mathbb{R}[x]$ 上の $\dim(V(x^2+1))$ について

$$\dim(V(x^2+1)) = \dim(\mathbb{R}[x]/(x^2+1))$$
$$= \dim(\mathbb{C}) = 0$$ . しかし…

$$V(x^2+1) = \{a \in \mathbb{R} \mid a^2+1=0\} = \emptyset$$ ←点ではない

Q. 何が"悪い"か?

⤳ $a^2+1=0$ を満たす $a \in \mathbb{R}$ が無いこと

# 可換環論による準備（イデアルの列と次元）

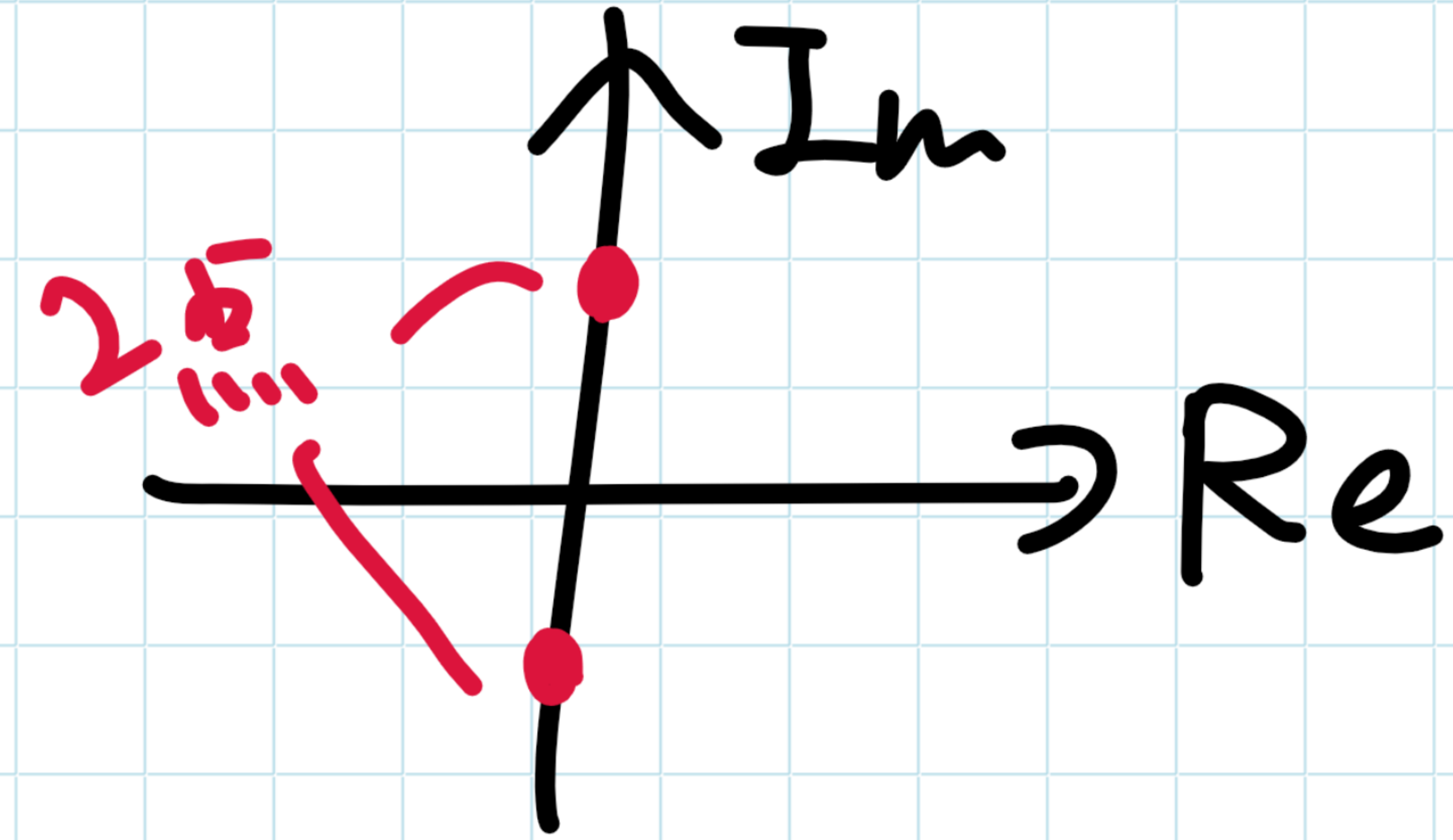
Q，幾何と自然に見合う為には？

A，代数閉体を用いればよい！

$\mathbb{C}[x]$ 上

$V(x^2+1) = \{i, -i\}$ ← 2点！

$\dim(V(x^2+1)) = 0$



# 可換環論による準備（イデアルの列と次元）

**Prop**

$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \supset I$ : イデアルに対して

$$V(\sqrt{I}) = V(I)$$

本質的に素イデアルのみ考えることに正当性アリ！（$\sqrt{I} := \{a \in A \mid \exists n, a^n \in I\}$）

# 可換環論による準備(オマケ)

$V$: 代数 → 幾何

$I$: 幾何 → 代数　　もある!

$$\left(\begin{array}{l} V: \mathbb{C}^n \text{内の subset} \\ I(V) := \left\{ f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall (a_1, \cdots, a_n) \in V, \\ f(a_1, \cdots a_n) = 0 \end{array} \right\} \end{array}\right)$$

# 可換環論による準備(オマケ)

$$I(V(J)) = \sqrt{J}$$ (Hilbetの零点定理)

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left, "V"] & V(J) \\
\text{代数} & \text{幾何} \\
I(V(J))=\sqrt{J} & V(J) \arrow[l, bend left, "I"]
\end{tikzcd}$$

# Zariski 位相

Q. $V(I)$ はそんなに幾何なのか?

## Prop

$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \supset I, J, I_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$ : 任意に対し,

(1) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$

(2) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$

(3) $V((0)) = \mathbb{C}^n$, $V(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]) = \emptyset$

位相!

# Zariski 位相

$\{V(I) \mid I$ は $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアル$\}$

を閉集合系として定めた $\mathbb{C}^n$ の位相空間を

**Zariski空間**という。

メッチャ幾何やん！

# 代入と幾何

$f(x) = 2x^2 + x + 3 \in \mathbb{C}[x]$

$(x-1)$で割ると

$2x^2 + x + 3 = (x-1)(2x+3) + 6$ より、

$f(1) = (1-1)(2\times 1 + 3) + 6$

$= 0 \times 5 + 6 = 6$

$\rightsquigarrow f(a) = (x-a)$ による剰余

# 代入と幾何

$$\mathbb{C}[x]/(x-a) \to \mathbb{C}, \quad f(x) \longmapsto f(a)$$

同様に

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(x_i - a_i) \to \mathbb{C}[x_1, \cdots, a_i, \cdots, x_n]$$

$$f(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto f(x_1, \cdots, a_i, \cdots, x_n)$$

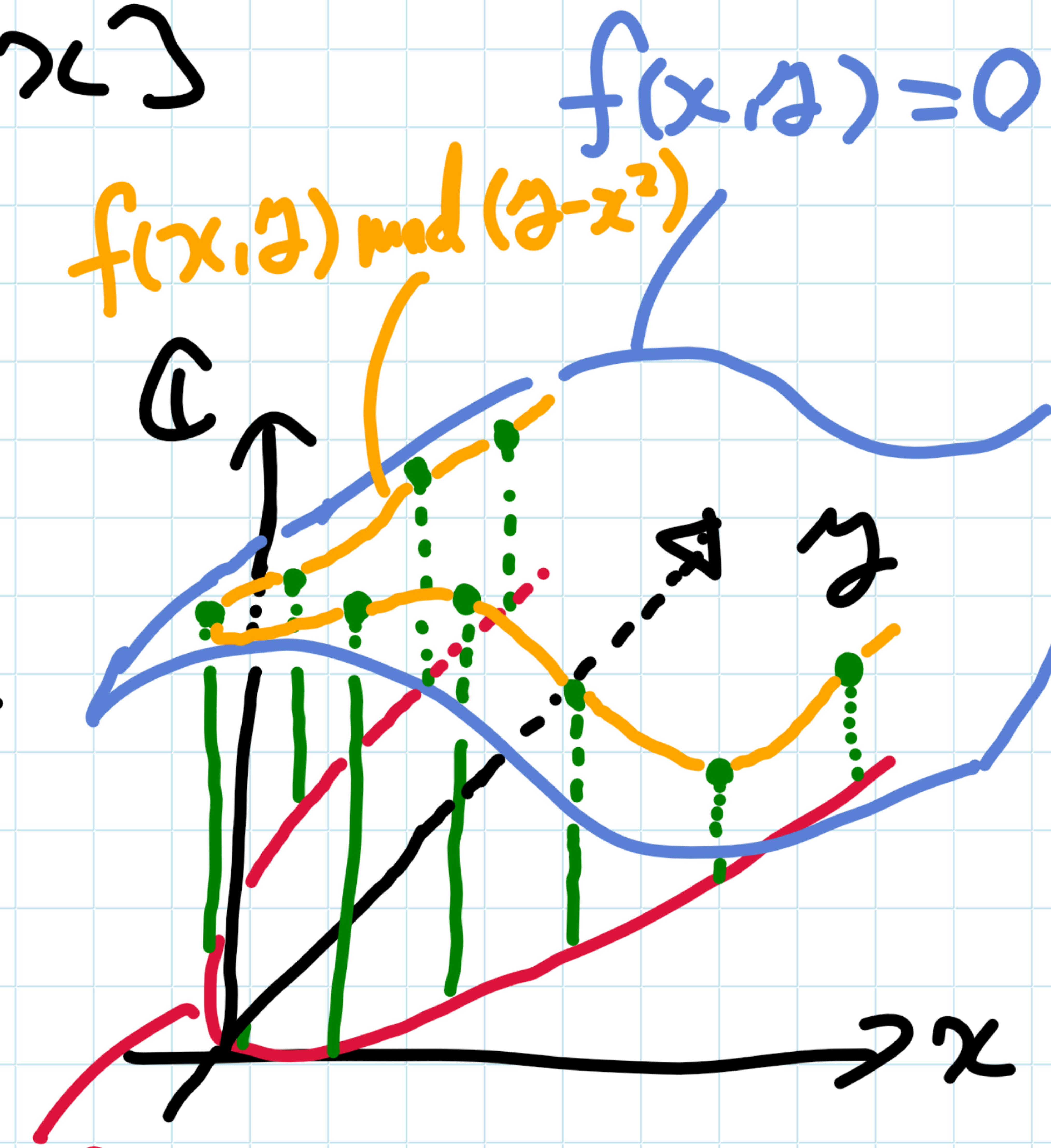
$\leadsto$ $/P$ 上の話になる！

# 代入と幾何

$$\mathbb{C}[x,y]/(y-x^2) \simeq \mathbb{C}[x]$$

$$y \longmapsto x^2$$

により




$$f(x,y) = 3x^2 + 4xy + 5y^2$$

$$\longmapsto 3x^2 + 4x(x^2) + 5(x^2)^2$$

$$= 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$$

赤い線の上の関数を考えている! $y-x^2=0$

# 代入と幾何

$A = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, $\mathfrak{p}$: 素イデアル

$$A_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \,\middle|\, f(x) \in A,\ g(x) \in A - \mathfrak{p} \right\}$$

⇝ 有理多項式の内、

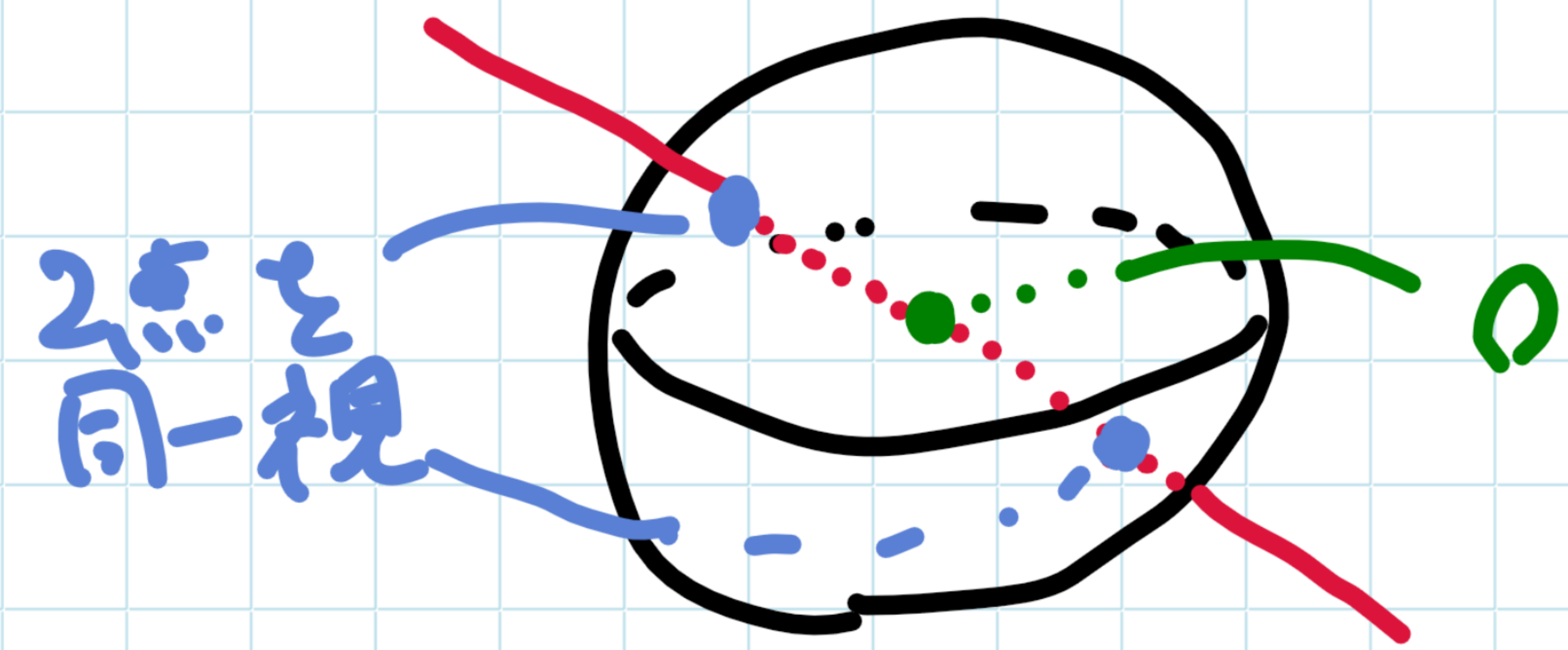
$\mathfrak{p}$ 上で分母が常に0にならないもの

⇝ $A_{\mathfrak{p}}$ は $V(\mathfrak{p})^c$ (Open set) 上正則な関数!

# 射影空間への埋め込み

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} := \left(\mathbb{C}^{n+1} - \{(0,0,\cdots,0)\}\right)/\sim$$

を射影空間という，ただし




$$(a_0,\cdots,a_n)\sim(b_0,\cdots,b_n)$$

$$\overset{def}{\iff} \exists r\in\mathbb{C}-\{0\},\ (a_0,\cdots,a_n)=(rb_0,\cdots,rb_n)$$

$(a_0,\cdots,a_n)$の同値類を$[a_0:\cdots:a_n]$で表す。

# 射影空間への埋め込み

$\mathbb{C}[x_0, \cdots, x_n] \supset I$：斉次イデアル

$V(I) = \{ [x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid \forall F \in I, F([x]) = 0 \}$

← 斉次

$[x_0 : \cdots : x_n] = [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n]$ に対して

$F(\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \cdots, x_n)$

← Fの次数

⇝ $F(x_0, \cdots, x_n) = 0$ は代表元の取り方に寄らない！

⇝ $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ 上にもザリスキ位相が入る！

# 射影空間への埋め込み

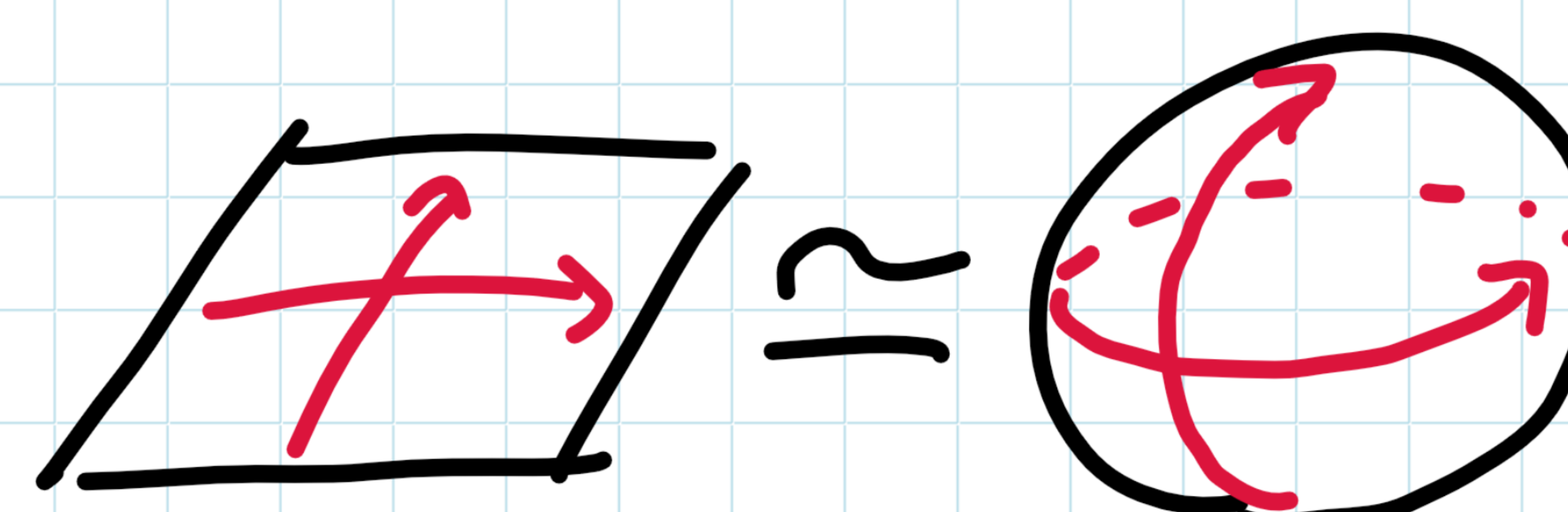
$$V(F)^c = \{[x_0, \cdots, x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid F(x_0, \cdots, x_n) \neq 0\}$$

とすれば openで、埋め込み

$$\mathbb{C}^n \hookrightarrow V(x_0)^c \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto [1, x_1, \cdots, x_n]$$ は

$$\mathbb{C}^n \simeq V(x_0)^c$$



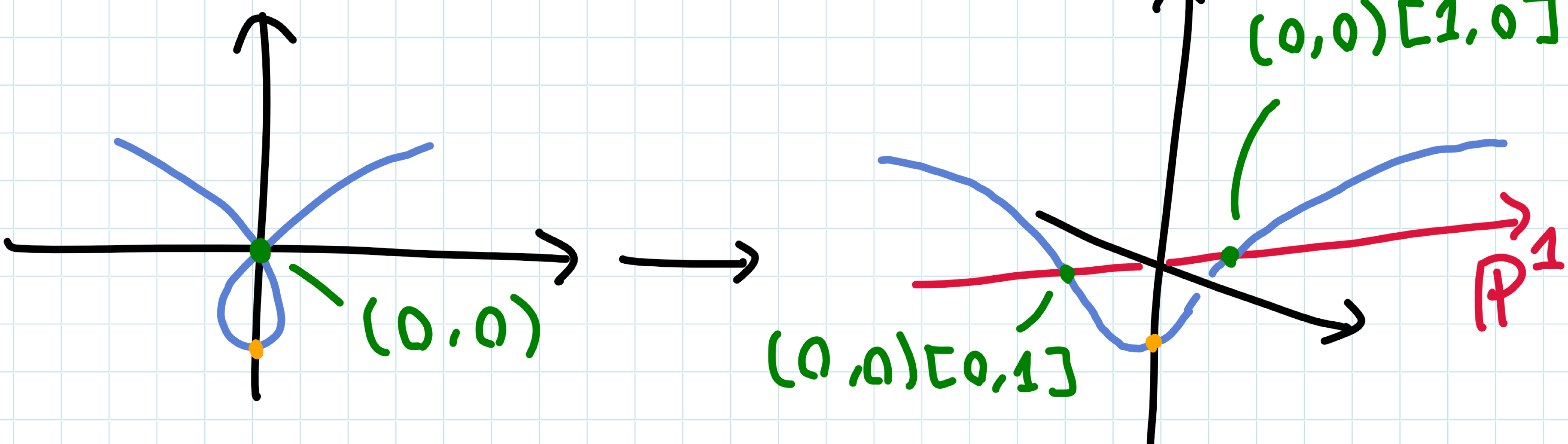
ウソすぎる図

# 射影空間への埋め込み

$$\widetilde{\mathbb{C}^2} = \{((x,y),[s:t]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid xt = ys\}$$

：原点での特異点解消を与える

$V(s)^c$ 上 $s \neq 0$ より $s=1$ としてよい



ご清聴
ありがとうございました！