

Sp2

LGV 公式とその応用

非交差経路、アステカダイヤモンド、最長増加部分列

めたち (@Metachick_2021)

地球上の人間を全て強制的にケモノへと変えたい

1 | C

非交差経路の数え上げ

- 経路が 2 つの場合
- より複雑な場合
- LGV 公式の証明

2 | B

アステカダイヤモンド

- アステカダイヤモンド
- Arctic Circle Theorem

3 | D

最長増加部分列

- 最長増加部分列
- ヤング盤への帰着
- Tracy-Widom 分布

「LGV 公式の様々な応用を紹介し、最後にそれらのつながりを紹介します！」

「数えやすい対象との一対一対応をつくる！」

1 | C

非交差経路の数え上げ

LGV 公式の導出まで

経路が2つの場合

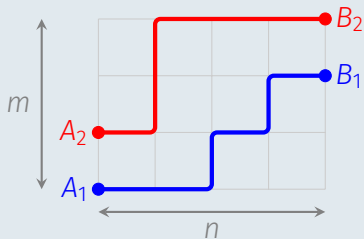
突然ですが、クイズです！

問題. 非交差経路の数

$n \times m$ のグリッド（格子）において、左下から右上へ向かう最短経路を考えます。
図のように、互いに途中で交わらないような2本の経路のペアは、全部で何通りあるでしょうか？

「交わらない」は詳しく言うと...

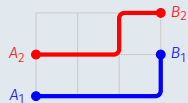
- ・ 点を共有しない
- ・ 辺も共有しない
- ・ 接することもない



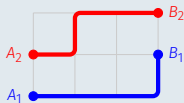
$A_1 \rightarrow B_1$ と $A_2 \rightarrow B_2$ が
交わらない経路の組を求める

$n = 3, m = 2$ の場合の全列挙

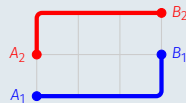
「条件を満たす非交差経路の組は全部で 6 通り 存在する」



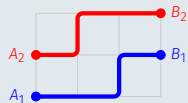
パターン 1



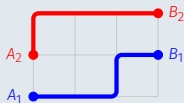
パターン 2



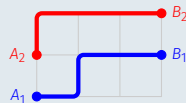
パターン 3



パターン 4



パターン 5



パターン 6

n, m が大きくなっても解くには？

発想：余事象を使おう！

「交わらない経路の組」＝「全ての経路の組」－「交わる経路の組」

1. 全ての経路の組

- ・ $A_1 \rightarrow B_1$ の最短経路： ${}_4C_1 = 4$ 通り
- ・ $A_2 \rightarrow B_2$ の最短経路： ${}_4C_1 = 4$ 通り

これらは独立に選べるので、
全体では $4 \times 4 = 16$ 通り。

2. 交わる経路の組

→あとは、この個数が分かればよい！



全 4 歩 ($\rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow$) のうち、
「 $\uparrow$ 」を置くタイミングを 1 つ選ぶ
 $\implies {}_4C_1 = 4$ 通り

「交わる経路の組」をどう数える？

発想：経路のスワップ

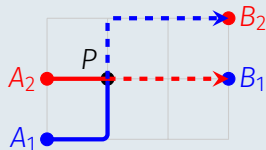
2つの経路が初めて交わった点 P 以降のルートを交換すると、
交わるペアは、必ず「 $A_1 \rightarrow B_2$ 」かつ「 $A_2 \rightarrow B_1$ 」のペアに化ける！

【交わる組の計算】

- ・ $A_1 \rightarrow B_2$ の最短経路： ${}_5C_2 = 10$ 通り
- ・ $A_2 \rightarrow B_1$ の最短経路： ${}_3C_0 = 1$ 通り

これらは独立に選べるので、
交わる経路は $10 \times 1 = 10$ 通り。

$n = 2, m = 3$ のときの答えは、全体の組 (16 通り) - 交わる組 (10 通り) = 6 通り !!



交点 P から先を入れ替える

まとめ：鍵は「経路のスワップ」

命題. 非交差経路の数え上げ

始点 $(0, 0), (0, 1)$ から、終点 $(n, m-1), (n, m)$ へ、それぞれ右・上の移動のみで向かう最短経路を考える。このとき、互いに交わらない経路の組の総数は以下で与えられる：

$${}_{n+m-1}C_n \times {}_{n+m-1}C_n - {}_{n+m}C_n \times {}_{n+m-2}C_n$$

1. 経路のすり替え — 1 対 1 対応（全単射）の構築
交点でスワップして、「交わる経路」を「目的地が入れ替わった経路」に変換した
2. 独立な計算への帰着 — 厄介な条件から計算しやすい条件へ
目的地がクロスしていれば「必ず交わる」ため、あとは交差を気にせず二項係数の掛け算のみで答えが出る！

LGV 公式の紹介

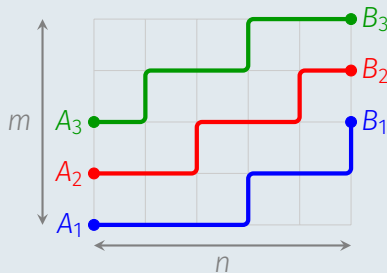
クイズ、再び

問題. 3 本の非交差経路

$n \times m$ のグリッドにおいて、左下から右上へ向かう最短経路を考えます。図のように、3 本すべてが互いに交わらないような経路の組は、全部で何通りあるでしょうか？

「交わらない」のルールは同じ

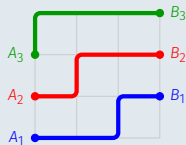
- ・ 点を共有しない
- ・ 辺も共有しない
- ・ 接することもない



$A_i \rightarrow B_i$ ($i = 1, 2, 3$) が交わらない経路の組を求める

$n = 3, m = 3$ の場合の全列挙

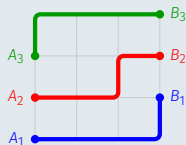
「横 3 × 縦 3 グリッドの場合、非交差経路の組は全部で 4 通り 存在する」



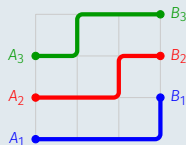
パターン 1



パターン 2



パターン 3



パターン 4

LGV 公式の紹介

定理. Lindström – Gessel – Viennot (LGV 公式)

有向非巡回グラフと頂点 $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ が以下の仮定を満たすとする。

- 互いに交わらない経路の組は、 A_i から B_j へ結ぶ場合にしか存在しない

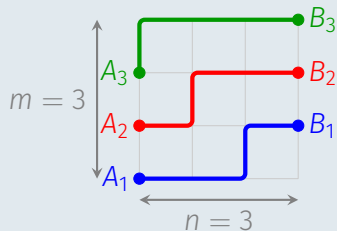
このとき、 i 番目の始点 A_i から j 番目の終点 B_j への経路数を $e(A_i, B_j)$ とおけば、 $A_i \rightarrow B_j$ を結ぶ交わらない経路の組の総数は、以下の行列式で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} e(A_1, B_1) & e(A_1, B_2) & \cdots & e(A_1, B_n) \\ e(A_2, B_1) & e(A_2, B_2) & \cdots & e(A_2, B_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(A_n, B_1) & e(A_n, B_2) & \cdots & e(A_n, B_n) \end{pmatrix}$$

「 3×3 経路 3 本の場合で **LGV 公式** を適用」

各 $A_i \rightarrow B_j$ の経路数を ${}_nC_r$ で計算して並べると、以下の行列式になる：

$$\det \begin{pmatrix} {}^4C_1 & {}^5C_2 & {}^6C_3 \\ {}^3C_0 & {}^4C_1 & {}^5C_2 \\ 0 & {}^3C_0 & {}^4C_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 10 & 20 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 4$$



「最初のケースも **行列式** として表現できる」

$$\underbrace{({}_4C_1 \times {}_4C_1)}_{\text{全体の組}} - \underbrace{({}_5C_2 \times {}_3C_0)}_{\text{交わる組}} = 4 \times 4 - 10 \times 1 = 6 \text{ もよく見たら行列式!}$$

$$\det \begin{pmatrix} {}_4C_1 & {}_5C_2 \\ {}_3C_0 & {}_4C_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 6$$



LGV 公式の証明

LGV 公式の証明 ① 行列式の展開の意味

復習. 行列式の定義

$$\det(E) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n e(A_i, B_{\sigma(i)})$$

- ・ σ は目的地の並び替え（置換）を表す
- ・ $\operatorname{sgn}(\sigma)$ は置換の符号（+1 または -1）を表す

この式は、組合せ論的には次のように解釈できる。

- ・ $\prod e(A_i, B_{\sigma(i)})$ は、 $A_1 \rightarrow B_{\sigma(1)}, A_2 \rightarrow B_{\sigma(2)}, \dots$ という（交差を許す）経路の組の総数
- ・ 行列式は、あらゆる経路の組を、符号付きで全て足し合わせたものである！

LGV 公式の証明 ② 経路のグループ分け

発想

”符号付き”の和なので、うまい打ち消しが起こるかも！

打ち消しが起こるかどうかを考えるために、
置換の符号 sgn の振る舞いを考察したい！

$$\begin{aligned}\det(E) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n e(A_i, B_{\sigma(i)}) \\ &= \sum_{\text{交わる経路の組 } P} \text{sgn}(\sigma_P) + \sum_{\text{交わらない経路の組 } P} \text{sgn}(\sigma_P) \\ &\stackrel{?}{=} \text{ここが0だと嬉しい} + \sum_{\text{交わらない経路の組 } P} \text{sgn}(\sigma_P)\end{aligned}$$

LGV 公式の証明 ③ スワップと置換の符号

交わる経路に対して、「最初の交点 P 」でそれ以降の経路をスワップする。

【スワップの効果】

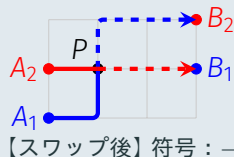
1. 目的地 B_1 と B_2 が入れ替わる
2. 置換 σ に互換 τ が掛けられる
3. 置換の符号が**必ず変わる**：

$$\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = -\text{sgn}(\sigma)$$

これにより、形は同じで符号だけが逆のペアを必ず作ることができる。



↓ 交点 P 以降を交換



LGV 公式の証明 ④ 交わる経路の対消滅

行列式の展開式の正体

打ち消しが発生して、以下の式が得られる！

$$\sum_{\text{交わる組}} \text{sgn}(\sigma) = 0$$

- ・ ルートは共通：スワップ前後の2つの組は、通る辺の組み合わせが完全に同じ
- ・ 符号だけ反転：目的地が1箇所入れ替わるため、置換の符号だけが逆になる
- ・ ペアで相殺：行列式の足し算の中で、この2つが綺麗に相殺する！

$$\underbrace{\text{sgn}(\sigma) \cdot (\text{経路の組})}_{+1 \text{ または } -1} + \underbrace{\text{sgn}(\sigma \circ \tau) \cdot (\text{同じ形の組})}_{-1 \text{ または } +1} = 0$$

残った「交わらない組」の和はどうなる？

$$\sum_{\text{交わらない組}} \text{sgn}(\sigma) = ?$$

- ・ **定理の仮定**より、「互いに交わらない経路の組は、 $A_i \rightarrow B_i$ の通りに結んだ場合にしか存在しない」が成り立つ
- ・ 目的地の入れ替えが発生しないため、生き残った組の置換は必ず $\sigma = \text{id}$ となる
- ・ 恒等置換の符号は常に $\text{sgn}(\text{id}) = +1$ である

これより、所望の結論が得られた！

$$\sum_{\text{交わらない組}} (+1) = \text{交わらない経路の組の総数}$$

2 | B

アステカダイヤモンド

アステカダイヤモンドの数え上げと Arctic Circle Theorem

アステカダイヤモンド

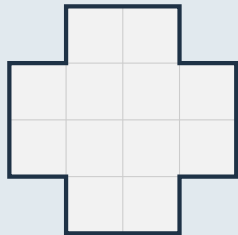
またもやクイズ！

問題：アステカダイヤモンドのドミノタイリング

図のような領域を、 1×2 または 2×1 のドミノだけで隙間なく敷き詰める方法は、全部で何通りあるでしょうか？

【設定の確認】

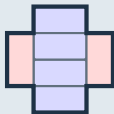
- ・ アステカダイヤモンド
この領域をアステカダイヤモンドと呼ぶ
次数はサイズのこと（まあだいたい）
- ・ 敷き詰めルール
ドミノが領域からはみ出したり、ドミノ同士が重なったりしてはいけない



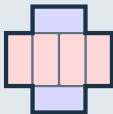
【次数 2 のアステカダイヤモンド】

アステカダイヤモンドの全列挙（次数 2）

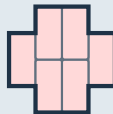
次数 2 のアステカダイヤモンドの敷き詰め方は全部で 8 通り存在する。
横ドミノを 青、縦ドミノを 赤 で色分けして書き並べてみる！



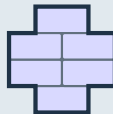
パターン 1



パターン 2



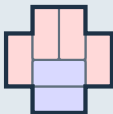
パターン 3



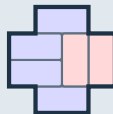
パターン 4



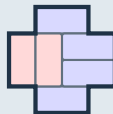
パターン 5



パターン 6



パターン 7

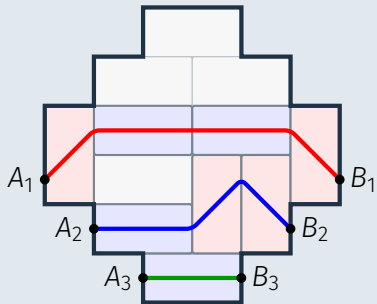


パターン 8

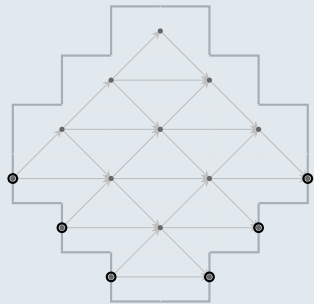
「実は、非交差経路の数え上げに帰着できる！」

LGV 公式への帰着：ドミノから経路への翻訳

【具体的なタイリングと経路】



【背後にある有向無閉路グラフ】



対応のルール：

- ・ 横ドミノ を通過するときは、辺の中点を結んで水平に直進する。
- ・ 縦ドミノ を通過するときは、中のグリッド線に沿って斜めに進む。

ドミノの配置はこの有向非巡回グラフから特定のルートを選び出すことに相当する。

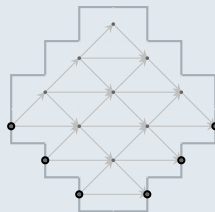
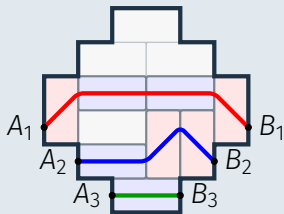
LGV 公式への帰着：ドミノから経路への翻訳

命題

ドミノタイリングが決まれば非交差経路が一意的に定まる。

逆に、非交差経路が決まればドミノタイリングが一意的に定まる。

- ・ 前述のルールで経路を生成すると必ず非交差経路になることが知られている
- ・ 逆に、非交差経路が決まると、タイリングが一意的に復元できる
(実は、余ったマスはすべて横に置けば良い)



LGV 公式の適用： $n = 2$ の具体例

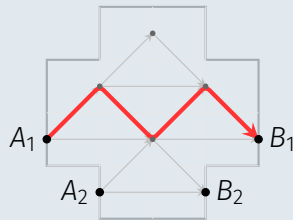
具体例：次数 $n = 2$ のアステカダイヤモンド

非交差経路の数え上げに帰着されたから **LGV 公式** が使える！

- ・ $A_1 \rightarrow B_1$ の経路数: 6 通り
- ・ $A_1 \rightarrow B_2$ の経路数: 2 通り
- ・ $A_2 \rightarrow B_1$ の経路数: 2 通り
- ・ $A_2 \rightarrow B_2$ の経路数: 2 通り

経路数を成分とする行列式を計算すると、

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 6 \times 2 - 2 \times 2 = 8$$



一般次数における行列の二項係数表示

定理. Aztec Diamond Theorem; Elkies et al., 1992

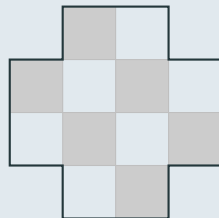
次数 n のアステカダイヤモンドのドミノタイリングの総数は $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ である。

LGV 公式を使うことで、非自明な数え上げができた！

- ・ 一般の場合には LGV 行列を具体的に書き下すのは難しい
- ・ しかし、追加の組合せ論的変形により Schröder 経路の数え上げへ帰着できる
- ・ これにより、行列式の漸化式が導けて、所望の値が求まる！

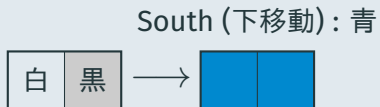
Arctic Circle Theorem

アステカダイヤモンドの盤面を、
白黒の市松模様に塗り分ける！



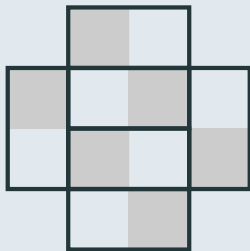
オーダー 2 の市松模様

「ドミノの向きとパリティで色分けする！」

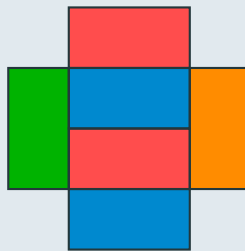


「具体例：次数2のアステカダイヤモンドの塗り分け！」

色分け前



色分け後



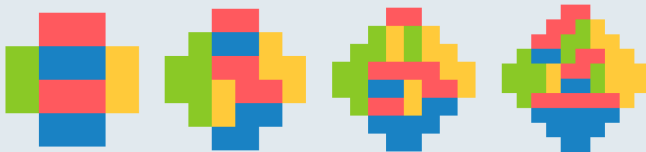
左図の配置において、それぞれのドミノが覆う「黒マス・白マス」の相対位置を見ることで、右図のように一意に色が決定される。

Arctic Circle Theorem

定理. Arctic Circle Theorem (Jockusch et al., 1998)

次数 $n \rightarrow \infty$ の極限において、一様ランダムに選んだドミノタイリングは高確率で内接円を境に二つの相へ分離する。円の外側では局所的なタイリングは漸近的に決定的（凍結領域）となり、円の内側では非自明なランダム性を保つ（流動領域）。

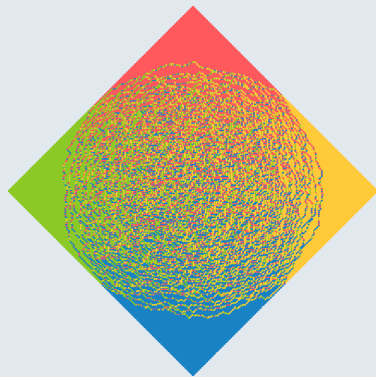
- ・ 次数が大きいときのアステカダイヤモンドのタイリングを考える
- ・ このとき、色の分布に規則性があることを主張している
- ・ 次数が小さいときは以下のように無秩序(?)



「 $n \rightarrow \infty$ では凍結領域流動領域に分かれる！」

右は $n = 200$ の図

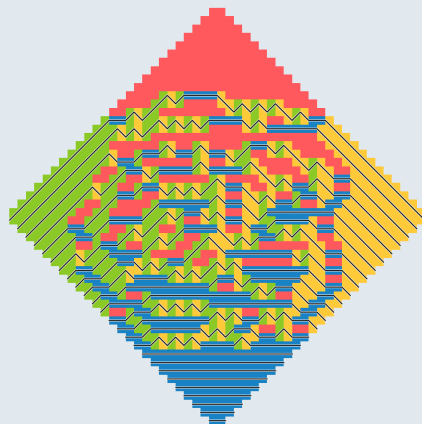
- ・ 外側は色が固定されている
- ・ 内側は色がランダムに入り混じっている
- ・ これは、ほとんどすべてのケースで起こる現象



「真ん中では非交差経路の”自由度”が高い！」

非交差経路を表示してみた ($n = 25$ のとき)

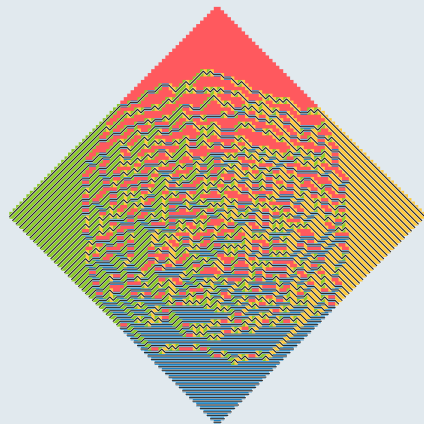
- ・ 左側では各経路はぎゅうぎゅう詰め
- ・ 真ん中は空間に余裕がある
- ・ 「非交差」という条件が本質的に効いている！



「真ん中では非交差経路の”自由度”が高い！」

非交差経路を表示してみた ($n = 60$ のとき)

- ・ 左側では各経路はぎゅうぎゅう詰め
- ・ 真ん中は空間に余裕がある
- ・ 「非交差」という条件が本質的に効いている！



補足：非交差経路に帰着しない方法

- ・ アステカダイヤモンドのタイリングは、非交差経路に帰着しない方法も存在する
- ・ 例えば、**ドミノシャッフリング**を用いた方法など
- ・ この方法を用いても、数え上げ・凍結現象の説明はできる

3 | D

最長増加部分列

ヤング盤への帰着と Tracy-Widom 分布

最長增加部分列

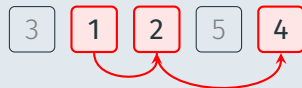
またもやクイズ！

問題：固定された LIS 長を持つ順列

$1, 2, \dots, n$ の順列 π のうち、最長増加部分列（LIS）の長さがちょうど k であるものは何通りあるでしょうか？

【設定の確認】

- ・ 部分列（Subsequence）
→ 連続した場所から取り出す必要はない
- ・ 増加部分列（Increasing Subsequence）
→ 部分列のうち、値が**単調増加**のもの
- ・ 最長増加部分列（LIS）
→ 増加部分列の中で、長さが最大のもの



⇓



長さ 3 の増加部分列（最長）

「長さ $n = 4$ の順列で、LIS 長が 2 のものを探す」

全 $4! = 24$ 通りのうち、LIS 長が 2 であるものは以下の 13 通りである。

(1, 4, 3, 2) (2, 1, 4, 3) (2, 4, 1, 3) (2, 4, 3, 1) (3, 1, 4, 2)
(3, 2, 1, 4) (3, 2, 4, 1) (3, 4, 1, 2) (3, 4, 2, 1) (4, 1, 3, 2)
(4, 2, 1, 3) (4, 2, 3, 1) (4, 3, 1, 2)

注意：全探索は現実的ではない

命題. 全探索の計算量

- ・ 単純な全探索：すべての順列について LIS 長を DP^1 で計算すると $O(n! \cdot n \log n)$
- ・ 工夫した全探索：3 進 bitDP 的なことをしても $O(n \cdot 3^n)$ くらい (たぶん)

- ・ $O(n! \cdot n \log n)$ は $n = 10$ 付近ですでに限界
- ・ $O(n \cdot 3^n)$ も $n = 15$ くらいでかなり厳しい

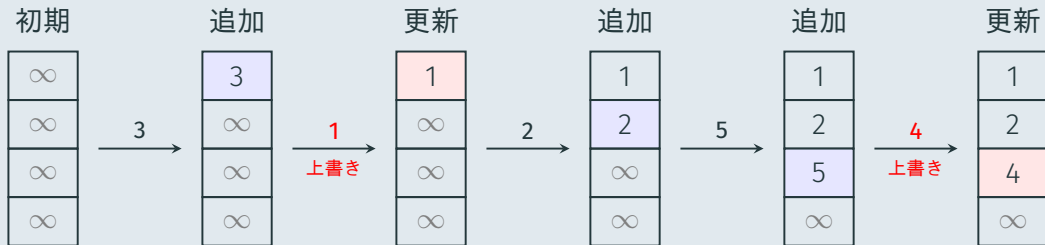
→ LGV 公式の力で数学的に解きたい！

¹DP：動的計画法

最長増加部分列 (LIS) の DP 過程

数列 3, 1, 2, 5, 4 の LIS を求める過程を観察する。

十分に長い配列を用意し、「各長さの部分列の末尾の最小値」を記録していく。



最終的に数字が入ったマス数は 3 個 (∞ でないマス数)。

したがって、この順列の最長増加部分列の長さは 3 だと分かる。

DP では大域的な情報はわからない

「DP では個別の情報はわかるが、**順列全体の構造は失われる**」

- ・ 情報の消失：小さい数字による上書きで過去の情報が消えてしまう
- ・ 状態が被る：その結果、異なる順列が全く同じ DP 配列に行き着く

順列 A : 3, 1, 2



順列 B : 1, 3, 2



全く同じ結果！

ヤング盤への帰着

「DPで失われた情報を活かそう」

2次元化のルール（列挿入）

- ・ 押し出し：上書きされて追い出された数字は、すぐ右の列へ移動する
- ・ 連鎖：右の列でも同じ DP ルールを適用し、上書きされたらさらに右へ

例として、(3, 1, 2, 5, 4) を考えてみる。

①「1」が「3」を上書き

1	→	3
---	---	---

2, 5 追加

②そのまま下へ追加

1	3
2	
5	

4 追加

③「4」が「5」を上書き

1	3
2	5
4	

完成

完成した2次元配列

1	3
2	5
4	

完成した2次元配列：ヤング盤

重要な2つの性質

1. 1列目の長さ = LIS の長さ

1列目は DP 配列そのものであるため、この長さが LIS に完全に一致する。

2. 単調増加性

書き込まれた数字は上から下へ、そして左から右へ必ず大きくなる

この配列を標準ヤング盤という！

ここが
LIS 長 (3)

1	3
2	5
4	

列：単調増加

行：単調増加

「標準ヤング盤だけでは復元ができない...」

例えば、完成した盤から手順を逆再生して元の順列を復元しようとしたとき...

1	3
2	5
4	

どっち?
→

一番最後にできたマスは **5** かな？

いや、最後にできたのは **4** かな？

どんな情報を追加すればよいか？

逆算に必要な「情報」とは

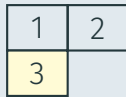
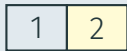
どのマスが、**何番目のステップ（時間）**で新しく作られたかが分かれば、最後に追加されたマス特定して、手順を完全に逆再生できる！

そのマスが何番目で作られたかを記録する専用の配列² も同時に作る。

① 「3」 追加

② 「1」 追加

③ 「2」 追加



・・・
形が広がる
たびに記録

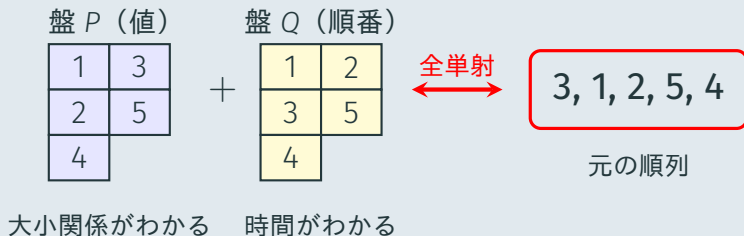
²この「順番の記録」も、縦横に単調増加する標準ヤング盤になる

順列とヤング盤の美しい関係 (RSK 対応)

定理. RSK 対応 (Robinson, 1938; Schensted, 1961; Knuth, 1970)

順列 $\pi \in S_n$ は、同じ形をもつ 2 つの標準ヤング盤 (standard Young tableaux) の組 (P, Q) と一対一に対応する。

順列を考える代わりに、値の記録 (盤 P) と順番の記録 (盤 Q) の 2 つをペアについて考えれば良くなった！



逆算の具体例：最後の1手を巻き戻す

逆算のルール

1. 時間 Q を見る：最大値を探せば「最後にできたマス」がわかる。
2. 値 P を見る：そのマスの数字が、左の列から「押し出された数字」
3. 特定：左の列で押し出された数字未満の最大のものが最後に追加された数字

盤 Q (時間の記録)

1	2
3	5
4	

最大の「5」に注目
⇒ 右下のマスが最後！

盤 P (値の記録)

1	3
2	5
4	

5 未満の最大の数字を
探せば良い！

一番最後に追加
された数字

4

もとの問題の解決：RSK 対応による言い換え

もとの問題：固定された LIS 長を持つ順列

$1, 2, \dots, n$ の順列 $\pi \in S_n$ のうち、最長増加部分列 (LIS) の長さがちょうど k であるものは何通りあるでしょうか？

RSK 対応を用いることで、我々は大きさ n の標準ヤング盤のペア (P, Q) であって以下を満たすものが何通りあるかを調べれば良い：

- ・ P と Q が全く同じ形状を持つ
- ・ その形状の 1 行目の長さ λ_1 がちょうど k である

非交差経路への帰着 (LGV 公式へ)

命題. ヤング盤と非交差経路の対応

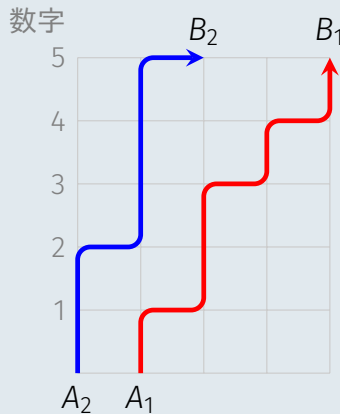
1 行目の長さが k の標準ヤング盤は、非交差経路の組と一対一対応する。

標準ヤング盤

1	3	4
2	5	

← 経路 1 (1,3,4 の高さで右へ)

← 経路 2 (2,5 の高さで右へ)



「形を固定したときの標準ヤング盤の個数を計算する！」

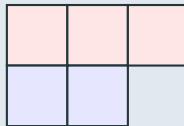
LGV 公式より、ヤング盤の個数は

$$f^{(3,2)} = \det \begin{pmatrix} {}^5C_3 & {}^5C_4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \text{ 通り}$$

RSK 対応より、この形を持つ順列は 25 通り^a。

^a盤 P と 盤 Q のペアの数なので二乗

形 $\lambda = (3, 2)$

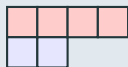


数字の入れ方が 5 通り

「LIS が k の順列の総数を求めるには？」

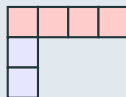
最終的には、1 行目の長さが k ($\lambda_1 = k$) であるすべてのヤング盤の形について、 $(f^\lambda)^2$ を足し合わせる必要がある。

形 A (行数が少ない)



2×2 の行列式

形 B (行数が多い)



3×3 の行列式

+

+

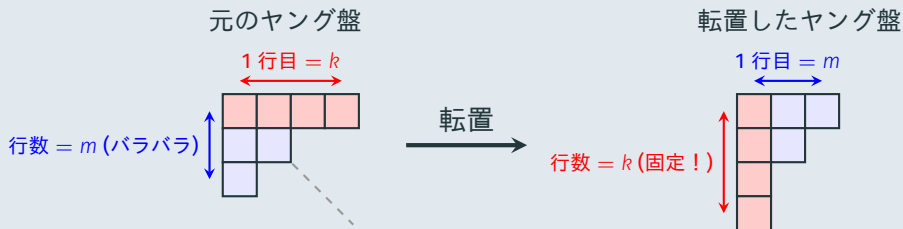
...

- ・ 盤の形によって行数 m がバラバラになる
- ・ 大きさが異なる行列式は扱いづらい

「バラバラの行数（経路）をどうやってまとめるか？」

対称性から、転置しても標準ヤング盤の個数は等しい。

⇒ LGV 公式で計算する行列式のサイズが、すべて $k \times k$ に統一される！



「組合せ論から、完全に代数的な問題へと昇華された！」



ここまで来れば様々な道具が使える！

- ・ 対称式論：Schur 関数、Jacobi-Trudi 公式
- ・ 線形代数：Cauchy-Binet の公式
- ・ 解析的組合せ論：母関数（Generating function）

Tracy-Widom 分布

具体例： $n = 3$ の場合の全列挙と計算

順列のサイズが 3 のときの LIS 長の平均は 2 である！

順列	LIS の例	長さ L_3
(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	3
(1, 3, 2)	(1, 3) または (1, 2)	2
(2, 1, 3)	(2, 3) または (1, 3)	2
(2, 3, 1)	(2, 3)	2
(3, 1, 2)	(1, 2)	2
(3, 2, 1)	(3), (2), (1) のいずれか	1

定理. Baik-Deift-Johansson の定理 (Baik, Deift, Johansson, 1999)

順列のサイズ n が無限に大きくなるとき、LIS の長さ L_n の平均値（期待値）は

$$E[L_n] \sim 2\sqrt{n}.$$

さらに、適切にスケールすると、その揺らぎは Tracy-Widom 分布に収束する。

- ・ 具体例： $n = 10000$ の順列（1万個の数字の並び）なら、LIS の長さは平均して $2\sqrt{10000} = 200$ 前後になる
- ・ 驚くべきことに、単なる平均値だけでなく、その確率分布までもが知られている

なぜ $2\sqrt{n}$ なのか？ : 非交差経路と「反発」

Arctic Circle Theorem との繋がり

前章で紹介した Arctic Circle Theorem でも、非交差の制約が「凍結領域」と「流動領域」の構造を生み出した。LIS の最大長も、この「互いに反発し合う経路の最前線がどこまで到達するか」という、数学的に似た構造を持っている。

キーワードは「非交差経路による相互作用」である。

- ・ LIS の問題は「非交差経路」の足し合わせに帰着された
- ・ 経路同士が交われないということは、磁石の同極のように、互いに道を譲り合う「反発力」が働いているのと同じ状態

F_2 Tracy-Widom 分布

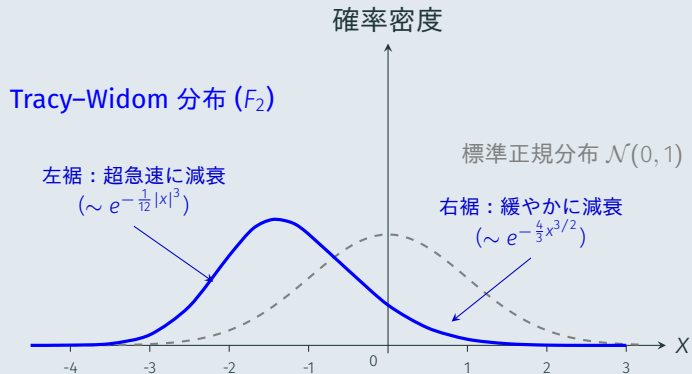
Tracy-Widom 分布とは、独立な事象から生まれる正規分布とは異なり、「互いに反発し合う要素の最大値」が従う統計分布である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{L_n - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \leq x \right) = F_2(x)$$

反発し合う系では、ばらつきは正規分布にはならない。

- ・ この分布は元々、ランダムに選んだ行列の固有値（これは反発し合う数）の最大値として発見された
- ・ 現在では、**コーヒーの染みの輪郭、燃え広がる炎の最前線、液晶のノイズ**など、現実世界の物理現象の揺らぎにも全く同じ分布が現れることが知られている

Tracy-Widom 分布の形状



「おまけ」と「参考文献」

おまけ：関連する問題など

- ABC216H Random Robots (diff: 3295)
→ 競技プログラミングの問題です。難しいです。コードが書ける人は是非。
- MacMahon の公式の導出
→ LGV などを用いて代数の話へと帰着し、Schur 関数などで殴ります。(これに関しては昔に YouTube で動画を投稿しています！)
- 全非負行列 (あるいは全正值行列)
→ 僕はあまり詳しくありませんが、どうやら団代数などに関連があるそう。

- ・ 高崎金久,『線形代数と数え上げ [増補版]』, 日本評論社, 2021.
- ・ 翁,「アステカダイヤモンドの敷き詰め」, Mathlog.
<https://mathlog.info/articles/4011>
- ・ Sen-Peng Eu, Tung-Shan Fu, “A Simple Proof of the Aztec Diamond Theorem,” arXiv:math/0412041, 2004. <https://arxiv.org/abs/math/0412041>
- ・ Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, James Propp, “Alternating Sign Matrices and Domino Tilings,” *Journal of Algebraic Combinatorics*, Vol. 1, No. 2, pp. 111–132; No. 3, pp. 219–234, 1992.

- William Jockusch, James Propp, Peter Shor, “Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem,” arXiv:math/9801068, 1998.
<https://arxiv.org/abs/math/9801068>
- C. Schensted, “Longest Increasing and Decreasing Subsequences,” *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 13, pp. 179–191, 1961.
- Ira M. Gessel, “Symmetric Functions and P -Recursiveness,” *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Vol. 53, No. 2, pp. 257–285, 1990.

- Jinho Baik, Percy Deift, Kurt Johansson, “On the Distribution of the Length of the Longest Increasing Subsequence of Random Permutations,” *Journal of the American Mathematical Society*, Vol. 12, No. 4, pp. 1119–1178, 1999.
- Craig A. Tracy, Harold Widom, “Level-Spacing Distributions and the Airy Kernel,” *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 159, No. 1, pp. 151–174, 1994.
- “Tracy–Widom distribution,” Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Tracy%E2%80%93Widom_distribution