Metachick's Mathematical Problems

@Metachick_2021

2025 年 12 月 3 日

1. 連続する素数 p,q,r,s,t は $p<q<r<s<t$ を満たす。このとき、以下の不等式を示せ。ただし、正整数 n の正の約数の個数を $d(n)$ で表す。

$$d(p+q)+d(q+r)+d(r+s)+d(s+t)\geq 18$$

2. 正整数に対して定義され正整数値をとる関数 f が任意の正整数 n,m に対して以下を満たす。このとき、f を求めよ。

$$f(n+m+1)=f(n)f(m)+f(n+1)f(m+1)$$

3. 内心を I とする三角形 ABC において、その九点円を Γ とし、頂点 B,C に対する傍接円を ω_B,ω_C とする。Γ と ω_B,ω_C の接点をそれぞれ T_B,T_C とし、BT_B,CT_C の交点を P とする。BI,CI と対辺の交点を U_B,U_C とし、T_BU_B,T_CU_C の交点を Q とする。このとき、P,Q,I が共線となることを示せ。

4. 正十二面体の頂点の一つを X とし、中心に関して X と対称な頂点を Y とする。カタツムリ君が、X からスタートして、辺で結ばれた頂点に移動することを 10^4 回繰り返す。ここで、直前にいた頂点に引き返すことも可能である。このとき、以下の条件をみたす移動方法の総数を、素数 5003 で割ったあまりを求めよ。

- 一度も X に戻らず、かつ 10^4 回目の移動で初めて Y に到達する

ただし、回転して一致するような移動方法も異なるものとして数える。

5. 円 Ω に内接する六角形 $ABCDEF$ は $|AB|=|BC|,|CD|=|DE|,|EF|=|FA|$ を満たす。Ω の A,B,C,D,E,F における接線をそれぞれ L_A,L_B,L_C,L_D,L_E,L_F とする。L_A と L_C の交点を B'、L_B と L_D の交点を C'、L_C と L_E の交点を D'、L_D と L_F の交点を E'、L_E と L_A の交点を F'、L_F と L_B の交点を A' とするとき, $A'D',B'E',C'F'$ は一点で交わることを示せ。