二面体群の部分群の個数

@Metachick_2021

2026 年 5 月 9 日

1 二面体群の定義

【定義 1.1】二面体群

以下で定まる位数 $2n$ の群 D_n を n 次の二面体群という。

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = e, s^2 = e, srs = r^{-1} \rangle$$

二面体群は、正 n 角形の回転および鏡映の全体からなる群である。上の定義では r が回転に、s が鏡映に対応する。また、$\frac{2\pi}{n}$ 回転と鏡映を表す行列を用いて具体的に記述することも可能である。

【命題 1.2】二面体群の具体的表示

二面体群 D_n は r, s を用いて次のように表示される。

$$D_n = \{r^i, r^i s \mid 0 \leq i < n\}$$

これにより、位数が $2n$ であることもわかる。

証明 D_n の元 x は $a_i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, $b, c \in \{0, 1\}$ を用いて、$x = s^b r^{a_1} s r^{a_2} s \cdots r^{a_k} s^c$ と表される。いま、$srs = r^{-1}$ であるから、$sr = r^{-1}s$ である。また、これより $(r^i s)(r^j s) = r^{i-j}$ も従う。これらを用いれば、

$$x = s^b r^{a_1} s r^{a_2} s \cdots r^{a_k} s^c = s^b r^{a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - (-1)^k a_k} s^c$$

を得る。$b = 0$ のとき、x はある整数 i を用いて $r^i, r^i s$ の形のいずれかで表現される。$b = 1$ のときも、

$$x = r^{-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^k a_k} s^{1+c}$$

となるので、ある整数 i を用いて $r^i, r^i s$ の形で表される。これより、D_n の元はある整数 i を用いて、r^i か $r^i s$ と表される。ここで、$\{r^i, r^i s \mid 0 \leq i < n\}$ の元の個数は $2n$ であり、D_n の位数も $2n$ であるから $D_n = \{r^i, r^i s \mid 0 \leq i < n\}$ である。 □

位数については、$\mathrm{ord}(r^i) = \frac{n}{\gcd(i,n)}$、$\mathrm{ord}(r^i s) = 2$ である。

2　二面体群の部分群

【命題 2.1】二面体群の部分群の個数

二面体群 D_n の部分群の個数は $\tau(n)+\sigma(n)$ である。

ここで、正整数 n に対して、$\tau(n)$ は n の正約数の個数、$\sigma(n)$ は正約数の総和を表す。

証明　簡単な計算により、D_n の部分群 $C_n := \langle r\rangle$ は正規部分群であることがわかる。このとき、$D_n/C_n = \{\bar{e},\bar{s}\}$ であるから、$\pi : D_n \to D_n/C_n$ を自然な全射とすれば、任意の D_n の部分群 H に対して、$\pi(H)$ は $\{\bar{e}\}$ か $\{\bar{e},\bar{s}\}$ となる。

$\pi(H)=\{\bar{e}\}$ のとき、H は C_n の部分群であり、これは巡回群に関する事実からその部分群の個数は $\tau(n)$ である。

$\pi(H)=\{\bar{e},\bar{s}\}$ のとき、$A=H\cap C_n$ とする。A は C_n の部分群であり、$\mathrm{ord}(A)=d$ とすれば、$A=\langle r^{\frac{n}{d}}\rangle$ である。また、$\pi(H)=\{\bar{e},\bar{s}\}$ より $(H:A)=2$ であったので、$|H|=2d$ である。いま、$\pi(H)=\{\bar{e},\bar{s}\}$ より、H はある整数 k を用いて $r^k s$ と表される元を含んでいる。これより、$\langle r^{\frac{n}{d}}, r^k s\rangle \subseteq \pi(H)$ である。また、$\mathrm{ord}(H)=\mathrm{ord}(\langle r^{\frac{n}{d}}, r^k s\rangle)=2d$ であるので、$\langle r^{\frac{n}{d}}, r^k s\rangle = \pi(H)$ を得る。すなわち、$\langle r^{\frac{n}{d}}, r^k s\rangle$ の個数を数えればよい。簡単な議論により、d を固定したとき、

$$\langle r^{\frac{n}{d}}, r^k s\rangle = \langle r^{\frac{n}{d}}, r^k s\rangle \iff k \equiv k \pmod{\frac{n}{d}}$$

であることがわかるから、$\mathrm{ord}(A)=d$ なる部分群 H の個数は $\frac{n}{d}$ である。以上より、$\pi(H)=\{\bar{e},\bar{s}\}$ のとき、部分群の個数は

$$\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}(d) = \sigma(n)$$

である。よって、D_n の部分群の個数は $\tau(n)+\sigma(n)$ である。 □

命題 2.1 の証明のカギは、H の部分群の数え上げをより小さな群 C_n と $C_2 := \{e,s\}$ の数え上げに分解したことであった。この考え方は半直積の概念で多少、整理することができる。

【定義 2.2】半直積

群 G とその正規部分群 N とする。G のある部分群 H に対して、$G=NH$ かつ $N\cap H=\{e\}$ が成り立っているとき、G を N の H による**半直積**といい、$G=N\rtimes H$ と表記する。

二面体群 D_n について、$D_n = C_n \rtimes C_2$ が成り立っている。この半直積の構造があると、命題 3 の証明のように場合分けを行うことができる。このことは、次の命題によって保証される。

【命題 2.3】半直積の性質

群 G とその正規部分群 N 、部分群 H に対して、$G = N \rtimes H$ が成り立っているとする。このとき、G の任意の部分群 K に対して、$A = N \cap K$ は K の正規部分群であり、$\pi : G \to G/N$ は自然な全射とすれば $B = \pi(K)$ について、$K/A \cong B$ である。

これにより、部分群 K について、A, B の形で場合分けをすることができる。特に、A は N の部分群であり、B は H の部分群であるので N, H の部分群を考えることに帰着される。（ここで、A, B の形に対して K が一意的に定まるわけではなく、K は複数個ある場合や存在しない場合もあることに注意したい。）

証明　まずは、A が K の正規部分群であることを示す。部分群であることはその定め方から直ちに従う。任意の N の元 x に対して、$xAx^{-1} \subseteq A$ であることを示す。すなわち、$xAx^{-1} \subseteq N$ かつ $xAx^{-1} \subseteq K$ を示すべきだが、$x \in K$ ゆえ後者は直ちに従う。また、仮定より N も G 上の正規部分群であったから、$xAx^{-1} \subseteq N$ も従う。次に、$K/A \cong B$ を示す。π の K への制限における核は A であるから、準同型定理から $K/A \cong B$ を得る。 □

二面体群のケースでは、$D_n = C_n \rtimes C_2$ であったので、まず C_2 の部分群について考えて、そこから C_n の部分群を決定し、その個数を数え上げて足すという流れで数え上げを行うことができた。なお、正規部分群が存在するからと言って、半直積に分解できるとは限らない。実際、四元数群 $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ は半直積に分解することができない。（余談：四元数群は任意の部分群が正規部分群だが非可換な群の例である。）