$\mathbb{R}^2$ から m 点を除いた空間のド・ラームコホモロジー

@Metachick_2021

2026 年 5 月 7 日

1 問題とその解説

【命題 1.1】

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m\}$, $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ $(1 \leq i < j \leq m)$ とする。ベクトル空間

$$W = \{\omega = f dx + g dy \mid f, g \in C^\infty(U), d\omega = 0\} / \{dh \mid h \in C^\infty(U)\}$$

の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての次元は m である。

証明 ベクトル空間 $Z^1(U), B^1(U)$ を次で定める。

$$Z^1(U) = \{\omega = f dx + g dy \mid f, g \in C^\infty(U), d\omega = 0\},\ B^1(U) = \{dh \mid h \in C^\infty(U)\}$$

ε を $\varepsilon < \min\{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \mid 1 \leq i < j \leq m)\}$ なる正の実数とし、$\mathbb{R}^2$ 内の $\mathbf{x}_i$ を中心とする半径 ε の正の向きの円周を C_i と表記する。このとき、各 C_i は $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m$ のうちちょうど $\mathbf{x}_i$ のみを含む。線形写像 $\Phi : Z^1(U) \to \mathbb{R}^m$ を

$$\Phi(\omega) = \left(\int_{C_1} \omega, \int_{C_2} \omega, \cdots, \int_{C_m} \omega \right)$$

と定めれば、Φ は全射準同型である。以下、全射性を示す。

■全射性

$f, g \in C^\infty(U)$ を

$$f_i = \frac{-(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},\ g_i = \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

で定めれば、$\omega_i = f_i dx + g_i dy$ は $d\omega_i = 0$ を満たす。また、簡単な計算により

$$\int_{C_i} \omega_i = 2\pi$$

を得る。一方、$j \neq i$ について、ω_i は $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{x}_i\}$ ではなめらかであるから、D_j を C_j の内部及び周として、ストークスの定理より

$$\int_{C_j} \omega_i = \int_{D_j} d\omega_i = 0$$

を得る。以上より、$(a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ に対して、$\omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{2\pi}\omega_i$ とすれば、

$$\Phi(\omega) = \left(\int_{C_1} \omega, \int_{C_2} \omega, \cdots, \int_{C_m} \omega\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{2\pi} \cdot 2\pi\delta_{1i}, \cdots, \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{2\pi} \cdot 2\pi\delta_{mi}\right) = (a_1, \cdots, a_m)$$

となるから、Φ は全射である。

■核の計算

　これより、Φ は全射準同型であるから、準同型定理から、$Z^1(U)/\mathrm{Ker}(\Phi) \cong \mathbb{R}^m$ である。$\mathrm{Ker}(\Phi) = B^1(U)$ を示す。任意の関数 $h \in C^\infty(U)$ に対して $\omega = dh$ とすると、任意の閉曲線 $C \subset U$ に対して

$$\int_C \omega = \int_C dh = 0$$

である。したがって $\Phi(dh) = 0$ となり、$B^1(U) \subset \ker\Phi$ が成り立つ。以後、$\ker\Phi \subset B^1(U)$ を示す。任意に $\omega \in Z^1(U)$ で $\Phi(\omega) = 0$ と仮定する。すなわち、各 i について

$$\int_{C_i} \omega = 0$$

が成り立つ。これから ω がある滑らかな関数の全微分であることを示す。任意の滑らかな閉曲線 $C \subset U$ に対して、C が囲む $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ の集合を $\{\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_k}\}$ とすると、

$$\int_C \omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{C_{i_j}} \omega$$

が成り立つ。右辺の符号は曲線の向きの取り方に一致させる。実際、C の内部に含まれる各 $\mathbf{x}_{i_j}$ の周りに互いに交わらない小円 $\tilde{C}_{i_j}$ を取り、C の内部からこれらの小円の内部を穴として取り除くと、得られる領域 D は ω が滑らかな領域上で定義される有界領域となる。ストークスの定理を D と ω に適用すると、境界上の積分の和はゼロであり、境界は C と各 $-\tilde{C}_{i_j}$ の和であるから上の関係式が得られる。いま、$\Phi(\omega) = 0$ の仮定と補題から、任意の閉曲線 $C \subset U$ に対して

$$\int_C \omega = 0$$

が従う。すなわち、ω は任意の閉曲線に沿って積分すると 0 になる。

ここで、任意に点 $x_0 \in U$ を選ぶ。任意の点 $x \in U$ に対して、x_0 から x までの滑らかな曲線 α を取って

$$h(x) := \int_{x_0}^{x} \omega := \int_\alpha \omega$$

と定める。上で任意の閉曲線の積分が 0 であることを示したので、経路依存性がないことがわかるから、写像 $h : U \to \mathbb{R}$ は定義される。最後に、h が滑らかであり $dh = \omega$ であることを示す。任意の点 $p \in U$ を取る。U は開集合であるから、p の十分小さな近傍として、$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ のいずれも含まない円板 $V \subset U$ を取ることができる。このとき V は単連結である。ω は U 上で定義された閉 1-形式、すなわち $d\omega = 0$ を満たすから、特に V 上でも閉である。したがって、ポアンカレの補題より、ある滑らかな関数 $h_V \in C^\infty(V)$ が存在して V 上で

$$dh_V = \omega$$

が成り立つ。一方、すでに定義した関数 h は、点 x_0 からの線積分によって与えられている。点 $p \in V$ を固定し、x_0 から p までの経路を x_0 から V 内のある固定された点までの経路と、その後 V 内を通る経路とに分解すると、微分積分学の基本定理（っぽいやつ...？）より

$$h(p) = h_V(p) + C$$

となる定数 $C \in \mathbb{R}$ が存在する。この定数 C は p に依らず V 上で一定であるから、h と h_V は V 上で定数分だけ異なる関数である。したがって両者の微分は一致し、V 上で

$$dh = dh_V = \omega$$

が従う。いま、点 $p \in U$ は任意であったから、以上の議論は U の任意の点の近傍で成り立つ。よって h は U 上で滑らかな関数であり、その全微分は

$$dh = \omega$$

を満たす。

■結論

以上より、準同型定理を用いることで、

$$W = Z^1(U)/B^1(U) \cong \mathbb{R}^m$$

であるから、$\dim(W) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$ を得る。 □