約数位相の性質

@Metachick_2021　2026 年 5 月 7 日

1　約数位相の基本性質

【定理 1.1】約数位相の基本性質

$n \in \mathbb{N}$ に対して、$U_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m$ は n の約数 $\}$ とする。$\mathcal{O}$ を $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ により生成される $\mathbb{N}$ 上の位相とする。このとき、以下が成り立つ。

1. $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathcal{O}$ の基底となる。
2. $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ が連結である。
3. $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ は T_0 だが、T_1, T_2 ではない。
4. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が稠密となるための必要十分条件は $\bar{A} = \mathbb{N}$ である。
5. $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ がコンパクトでない。

証明　$\mathcal{O}$ は $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ により生成される位相であった。すなわち、$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を含む最小の位相である。この記事（`https://mathlandscape.com/open-base/`）の定理 4 より、基底であることを示すには、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \mathbb{N}$ であることと、

$$\forall U_{n_1}, U_{n_2} \in \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \exists\, \Lambda \subseteq \mathbb{N} \text{ s.t. } U_{n_1} \cap U_{n_2} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

を示せばよい。後者については U_n の定め方から直ちに従う。
また、前者についても、$U_{n_1} \cap U_{n_2} = U_{\gcd(n_1,n_2)}$ であることから従う。よって、$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は基底となる。

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$1 \in U_n$ であることと $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が基底であることを併せれば、任意の開集合 O に対して $1 \in O$ を得る。よって、$(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ は連結である。

$(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ は T_0 だが、T_1, T_2 ではない。$T_2 \implies T_1 \implies T_0$ なので、T_0 なることと T_1 でないことを示せばよい。2 点 m_1, m_2 をとる。一般性を失わず、$m_1 < m_2$ とする。このとき、$m_1 \in U_{m_1}$ だが、$m_2 < m_1$ より、$m_2 \nmid m_1$ ゆえ、$m_2 \notin U_{m_1}$ となる。よって、T_0 である。
2 点 $1, 2$ に対して、2 を含む開集合は 1 も含むから、T_1 ではない。

A が稠密であることの定義は、$\bar{A} = \mathbb{N}$ であることである。A が稠密なとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ とその近傍 N_n に対して、$N_n \cap A \neq \emptyset$ が成り立つことと同値である。すなわち、任意の開集合 O に対して、$O \cap A \neq \emptyset$ が成り立つことと同値である。よって、$1 \in A$ である。これより、A が稠密ならば $1 \in A$ である。逆に、$1 \in A$ であるとき、$\{\bar{1}\} \subseteq \bar{A}$ であり、任意の $x \in \mathbb{N}$ について、x の近傍は 1 を含むから、$\{\bar{1}\} = \mathbb{N}$ である。よって、A が稠密なることは、$1 \in A$ であることと同値である。

$(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ がコンパクトでないことを示す。$V_n = \displaystyle\bigcup_{m \leq n} U_m = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ とする。このとき、各 V_n は開集合であり、$\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ の開被覆である。$\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の有限部分被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる。ただし、Λ は $\mathbb{N}$ の有限部分集合。このとき、有限性から Λ の最大限 M が存在する。$M + 1 \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ となり、これは $\mathbb{N}$ の有限部分被覆であることに矛盾する。よって、コンパクトでない。 $\square$

2　約数位相の自己同型群

【定理 2.1】約数位相の自己同型群

定理 1.1 と同様に $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ を定める。$(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ の自己同型全体がなす群を $\mathrm{Aut}(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ とする。このとき、以下が成り立つ。

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が $\mathcal{O}$ 上で連続となるための必要十分条件は f が整除関係を順序とした順序同型であることである。
2. $\mathrm{Aut}(\mathbb{N}, \mathcal{O}) \cong \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ である。

証明　$d \mid x \implies f(d) \mid f(x)$ が f が連続であることの必要十分条件であることを示す。$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は基底であったから、それらの逆像が開集合かどうかだけ考慮すれば良い。

$$
\begin{aligned}
&f : \text{continuous} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(U_n) : \text{open} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \mid n\} : \text{open} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, f(x) \mid n \implies [\exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in U_m \subseteq f^{-1}(U_n)] \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, f(x) \mid n \implies U_x \subseteq f^{-1}(U_n) \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, f(x) \mid n \implies [d \mid x \implies f(d) \mid n] \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, f(x) \mid n \land d \mid x \implies f(d) \mid n \\
&\iff \forall x \in \mathbb{N}, d \mid x \implies f(d) \mid f(x)
\end{aligned}
$$

3 行目から 4 行目の変形は U_x が x を含む最小の開集合であることを用いた。また、6 行目から 7 行目への右向きの変形は、$n = f(x)$ とすることで得られる。

(1) での議論から、f が同相写像であることは、f が順序同型であることと同値である。したがって、$\mathbb{N}$ 上の順序同型全体がなす群を求めればよい。$f(1) = 1$ であることと、p を素数として、$f(p)$ が再び素数となることがわかる。また、$\gcd(n, p) = 1$ なる n と素数 p に対して、$f(np) = f(n)f(p)$ であることがわかる。帰納的に、$f(np^i) = f(n)f(p)^i$ であることがわかる。以上により、$\mathbb{N}$ 上の順序自己同型は素数の全体 $\mathcal{P}$ の置換群と同型である。　□

3　ポイント

「生成される位相」「稠密」といった、用語を忘れていた場合には再度確認しておくとよいと思う。定理 1 を示すにあたっては、この記事（`https://mathlandscape.com/open-base/`）の定理 4 と次の命題が重要であった：

【命題 3.1】

X を位相空間、A を X の部分空間とする。$x \in \bar{A}$ であることと、任意の x の近傍 N_x に対して、$N_x \cap A \neq \emptyset$ であることは同値である。

「近傍」を「開近傍」に変えても問題ない。この命題は位相空間論を行う上で、呼吸をするように使う。特に、閉包が絡む議論を行う場合にはまず思い浮かべたい命題である。

また、約数位相はアレクサンドロフ位相の例になっていた。

【定義 3.2】アレクサンドロフ位相

前順序集合 $(X, \preceq)$ において、$U_x = \{y \in X \mid x \preceq y\}$ とする。$\{U_x\}_{x \in X}$ により生成される X の位相をアレクサンドロフ位相という。

前順序とは、反射律と推移律をみたすような二項関係のことである。約数位相は $(\mathbb{N}, |)$ に関するアレクサンドロフ位相になっていた。アレクサンドロフ位相には、次のような特徴がある。

【命題 3.3】

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、次は同値である。

1. $(X, \mathcal{O})$ がアレクサンドロフ位相である
2. 任意の $x \in X$ に対して、最小の開近傍が存在する
3. 有限とは限らない集合 Λ について、$\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ が成り立つ

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2).**
(1) により集合族 $\{U_x\}_{x\in X}$ は位相 $\mathcal{O}$ の基底である。任意の $x\in X$ に対して $x\in U_x$ である。任意の開集合 $O\in\mathcal{O}$ が x を含むとき、ある集合 $A\subseteq X$ が存在して

$$O=\bigcup_{a\in A}U_a,$$

かつ、$x\in O$ よりある $a\in A$ が存在して $x\in U_a$ となる。すなわち $a\preceq x$。このとき任意の y に対して $x\preceq y$ かつ $a\preceq x$ ならば推移性により $a\preceq y$ であり、したがって $U_x\subseteq U_a\subseteq O$ が成り立つ。よって U_x は x の最小の開近傍である。従って (2) が成り立つ。

(2) $\Longrightarrow$ (3).
各点 x に最小の開近傍 V_x が存在するとする。任意の開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を取り、その交わりを $O=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ とおく。任意の $x\in O$ を取れば、各 O_λ は x を含む開集合であるから、最小性より $V_x\subseteq O_\lambda$ が任意の λ について成り立つ。従って $V_x\subseteq O$。よって

$$O=\bigcup_{x\in O}V_x,$$

となり右辺は開集合の和であるから開である。したがって任意の開集合族の交わり O は開である。よって (3) が成り立つ。

(3) $\Longrightarrow$ (1).
任意交わりが開であると仮定する。任意の点 $x\in X$ に対して

$$V_x:=\bigcap\{\,O\in\mathcal{O}\mid x\in O\,\}$$

と定めると、仮定より $V_x\in\mathcal{O}$ である。$x\in V_x$ であり、任意の開集合 W が x を含むとき定義から $V_x\subseteq W$ であるから V_x は x の最小開近傍である。ここで関係 $\preceq$ を

$$x\preceq y\quad\Longleftrightarrow\quad y\in V_x$$

により定義すると、$\preceq$ は反射律（$x\in V_x$）と推移律（もし $y\in V_x$ かつ $z\in V_y$ ならば任意の開集合 O に対して $x\in O\Rightarrow y\in O\Rightarrow z\in O$ より $z\in V_x$）を満たすので前順序である。さらにこのとき各 V_x はちょうど

$$V_x=\{y\in X\mid x\preceq y\}$$

の形になっている。したがって集合族 $\{V_x\}_{x\in X}$ は前順序 $(X,\preceq)$ による基本的な上集合 (upper set) であり、任意の開集合は点ごとの最小開近傍の和として表される（前段の (2) $\Longrightarrow$ (3) の議論と同様)。従って位相 $\mathcal{O}$ は前順序から生成される位相であり、(1) が成り立つ。 $\square$

4　参考文献

1. Wikipedia, *Alexandrov topology*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Alexandrov_topology`, (閲覧日：2026/02/27)
2. Steen, L. A., & Seebach, J. A. (1978). Counterexamples in Topology (2nd ed.). Springer.