加群周りの圏論っぽい話題

@Metachick_2021

2026 年 5 月 25 日

1　核・余核の普遍性

【定理 1.1】核の普遍性

A を可換環、M, N を A 加群とし、$f\colon M \to N$ を A 線型写像とする。$K = \mathrm{Ker} f$ とし、$i\colon K \to M$ を包含写像とする。このとき、任意の A 加群 P と A 線型写像 $h\colon P \to M$ が $f \circ h = 0$ を満たすならば、A 線型写像 $g\colon P \to K$ で $h = i \circ g$ を満たすものが一意に存在する。

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, dashed, "\exists ! g"'] \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, dotted, bend left, "0"] & & \\
K \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

さらに、別の A 加群 K' と A 線型写像 $i'\colon K' \to M$ の組が同様の普遍性（$f \circ i' = 0$ かつ任意の h に対する一意存在性）を満たすならば、一意的な A 同型写像 $\phi\colon K' \to K$ が存在して $i' = i \circ \phi$ を満たす。すなわち、普遍性を満たす対象は同型を除いて一意である。

証明

　g の存在性を示す。条件より、$\mathrm{Im} h \subseteq K$ であるので、$g : P \to K$ を $g(x) = h(x)$ で定めれば、これは well-defined である。さらにこのとき、$i \circ g = h$ であり、h の線形性から g も線形である。次に、一意性を示す。図式を可換にするような $g_1, g_2 : P \to K$ が存在したとすると、$i \circ g_1(x) = i \circ g_2(x)$ が成り立ち、i は単射だから $g_1(x) = g_2(x)$ が成り立つ。したがって、$g_1 = g_2$ である。次に、核の同型を除いた一意性を示す。(K', i') も核の普遍性を満たすとする。$f \circ i' = 0$ であるから、K の普遍性より $i' = i \circ \phi$ を満たす A 線型写像 $\phi\colon K' \to K$ が一意に存在する。同様に $f \circ i = 0$ であるから、K' の普遍性より $i = i' \circ \psi$ を満たす A 線型写像 $\psi\colon K \to K'$ が一意に存在する。このとき、$i \circ (\phi \circ \psi) = (i \circ \phi) \circ \psi = i' \circ \psi = i$ が成り立つ。一方で、恒等写像 $\mathrm{id}_K\colon K \to K$ も $i \circ \mathrm{id}_K = i$ を満たす。K の普遍性における一意性（ここでは $P = K, h = i$ としたもの）より、$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_K$ でなければならない。全く同様にして $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{K'}$ も従う。したがって ϕ は A 同型写像であり、普遍性を満たす対象は同型を除いて一意である。 □

【定理 1.2】余核の普遍性

A を可換環、M, N を A 加群とし、$f\colon N \to M$ を A 線型写像とする。$C = \mathrm{Coker} f = M/\mathrm{Im} f$ とし、$p\colon M \to C$ を自然な全射とする。このとき、任意の A 加群 P と A 線型写像 $h\colon M \to P$ が $h \circ f = 0$ を満たすならば、A 線型写像 $g\colon C \to P$ で $h = g \circ p$ を満たすものが一意に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] \arrow[drr, dotted, bend right, "0"'] & M \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "h"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\
& & P
\end{tikzcd}
$$

さらに、別の A 加群 C' と A 線型写像 $p'\colon M \to C'$ の組が同様の普遍性（$p' \circ f = 0$ かつ任意の h に対する一意存在性）を満たすならば、一意的な A 同型写像 $\phi\colon C \to C'$ が存在して $p' = \phi \circ p$ を満たす。すなわち、普遍性を満たす対象は同型を除いて一意である。

証明

g の存在性を示す。$g : C \to P$ を $g(x + \mathrm{Im} f) = h(x)$ で定めれば、簡単な議論によりこれは well-defined である。さらに、$g \circ p = h$ であり、h の線形性から g も線形である。次に、一意性を示す。図式を可換にするような $g_1, g_2 : C \to P$ が存在したとすると、やはり p の全射性から両者は一致する。したがって、$g_1 = g_2$ を得る。次に、余核の同型を除いた一意性を示す。(C', p') も余核の普遍性を満たすとする。$p' \circ f = 0$ であるから、C の普遍性より $p' = \phi \circ p$ を満たす A 線型写像 $\phi\colon C \to C'$ が一意に存在する。同様に $p \circ f = 0$ であるから、C' の普遍性より $p = \psi \circ p'$ を満たす A 線型写像 $\psi\colon C' \to C$ が一意に存在する。このとき、$(\psi \circ \phi) \circ p = \psi \circ (\phi \circ p) = \psi \circ p' = p$ が成り立つ。一方で、恒等写像 $\mathrm{id}_C\colon C \to C$ も $\mathrm{id}_C \circ p = p$ を満たす。C の普遍性における一意性（ここでは $P = C, h = p$ としたもの）より、$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_C$ でなければならない。全く同様にして $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{C'}$ も従う。したがって ϕ は A 同型写像であり、普遍性を満たす対象は同型を除いて一意である。 □

核と余核の双対性　**Note**

両者の図式は矢印の向きを取り替えたもの（さらに全射と単射を入れ替えたもの）になっており、圏論的に「双対」と表現される。実際、Abel 圏の公理は双対化に対して不変（自己双対的）であるため、核についての命題を反対圏で読み替えることで余核についての対応する命題が得られる。これを双対原理という。したがって、核に関する圏論的命題を示せば、その双対命題として余核に関する主張も同様に従う。

なお、剰余加群の普遍性は余核の普遍性の特殊な場合に過ぎない。

2 直積・直和の普遍性

【定理 2.1】直積の普遍性

A を可換環、$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A 加群の族とする。$P=\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を直積とし、各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $p_\lambda\colon P\to M_\lambda$ を自然な射影とする。このとき、任意の A 加群 X と A 線型写像の族 $\{h_\lambda\colon X\to M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたならば、A 線型写像 $g\colon X\to P$ で任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $h_\lambda=p_\lambda\circ g$ を満たすものが一意に存在する。

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dashed, "\exists! g"'] \arrow[dr, "h_\lambda"] & \\
P \arrow[rr, "p_\lambda"] & & M_\lambda
\end{tikzcd}$$

さらに、別の A 加群 P' と A 線型写像の族 $\{p'_\lambda\colon P'\to M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組が同様の普遍性（任意の h_λ に対する一意存在性）を満たすならば、一意的な A 同型写像 $\phi\colon P'\to P$ が存在して任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $p'_\lambda=p_\lambda\circ\phi$ を満たす。すなわち、普遍性を満たす対象は同型を除いて一意である。

証明

g の存在性を示す。$g\colon X\to P$ を $g(x)=(h_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ で定めれば、各成分の線形性から g は A 線型写像である。さらにこのとき、各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $(p_\lambda\circ g)(x)=p_\lambda((h_\mu(x))_{\mu\in\Lambda})=h_\lambda(x)$ となり、$p_\lambda\circ g=h_\lambda$ が成り立つ。次に、一意性を示す。任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $p_\lambda\circ g_1=p_\lambda\circ g_2=h_\lambda$ を満たす A 線型写像 $g_1,g_2\colon X\to P$ が存在したとする。直積の元の定義より、任意の $x\in X$ に対して $g_1(x)$ と $g_2(x)$ のすべての成分が一致する（すなわち $p_\lambda(g_1(x))=p_\lambda(g_2(x))$）ため、$g_1(x)=g_2(x)$ である。したがって、$g_1=g_2$ を得る。次に、直積の同型を除いた一意性を示す。$(P',\{p'_\lambda\})$ も直積の普遍性を満たすとする。P の普遍性より、任意の λ に対して $p'_\lambda=p_\lambda\circ\phi$ を満たす A 線型写像 $\phi\colon P'\to P$ が一意に存在する。同様に P' の普遍性より、任意の λ に対して $p_\lambda=p'_\lambda\circ\psi$ を満たす A 線型写像 $\psi\colon P\to P'$ が一意に存在する。このとき、任意の λ に対して $p_\lambda\circ(\phi\circ\psi)=(p_\lambda\circ\phi)\circ\psi=p'_\lambda\circ\psi=p_\lambda$ が成り立つ。一方で、恒等写像 $\mathrm{id}_P\colon P\to P$ も $p_\lambda\circ\mathrm{id}_P=p_\lambda$ を満たす。P の普遍性における一意性（ここでは $X=P, h_\lambda=p_\lambda$ としたもの）より、$\phi\circ\psi=\mathrm{id}_P$ でなければならない。全く同様にして $\psi\circ\phi=\mathrm{id}_{P'}$ も従う。したがって ϕ は A 同型写像であり、普遍性を満たす対象は同型を除いて一意である。 □

【定理 2.2】直和の普遍性

A を可換環、$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A 加群の族とする。$S = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を直和とし、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\iota_\lambda\colon M_\lambda \to S$ を自然な単射とする。このとき、任意の A 加群 X と A 線型写像の族 $\{h_\lambda\colon M_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたならば、A 線型写像 $g\colon S \to X$ で任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ を満たすものが一意に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
S \arrow[ur, dashed, "\exists! g"] & & M_\lambda \arrow[ll, "\iota_\lambda"] \arrow[ul, "h_\lambda"']
\end{tikzcd}
$$

さらに、別の A 加群 S' と A 線型写像の族 $\{\iota'_\lambda\colon M_\lambda \to S'\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組が同様の普遍性（任意の h_λ に対する一意存在性）を満たすならば、一意的な A 同型写像 $\phi\colon S \to S'$ が存在して任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\iota'_\lambda = \phi \circ \iota_\lambda$ を満たす。すなわち、普遍性を満たす対象は同型を除いて一意である。

証明

g の存在性を示す。直和の任意の元は、有限個の非ゼロ成分の和 $\sum_{\lambda\in\Lambda} \iota_\lambda(x_\lambda)$（ただし $x_\lambda \in M_\lambda$）の形に一意的に表せる。そこで $g\colon S \to X$ を $g\left(\sum_\lambda \iota_\lambda(x_\lambda)\right) = \sum_\lambda h_\lambda(x_\lambda)$ で定めれば、これは well-defined であり、A 線型写像となる。さらにこのとき、各 $\lambda \in \Lambda$ と $x_\lambda \in M_\lambda$ に対して $(g\circ\iota_\lambda)(x_\lambda) = g(\iota_\lambda(x_\lambda)) = h_\lambda(x_\lambda)$ となり、$g\circ\iota_\lambda = h_\lambda$ が成り立つ。次に、一意性を示す。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $g_1\circ\iota_\lambda = g_2\circ\iota_\lambda = h_\lambda$ を満たす A 線型写像 $g_1, g_2\colon S \to X$ が存在したとする。直和 S は各 $\iota_\lambda(M_\lambda)$ によって生成されるため、任意の $y \in S$ は $y = \sum_\lambda \iota_\lambda(x_\lambda)$ と書ける。線形性より $g_1(y) = \sum_\lambda g_1(\iota_\lambda(x_\lambda)) = \sum_\lambda h_\lambda(x_\lambda) = \sum_\lambda g_2(\iota_\lambda(x_\lambda)) = g_2(y)$ となり、すべての元で一致する。したがって、$g_1 = g_2$ を得る。次に、直和の同型を除いた一意性を示す。$(S', \{\iota'_\lambda\})$ も直和の普遍性を満たすとする。S の普遍性より、任意の λ に対して $\iota'_\lambda = \phi \circ \iota_\lambda$ を満たす A 線型写像 $\phi\colon S \to S'$ が一意に存在する。同様に S' の普遍性より、任意の λ に対して $\iota_\lambda = \psi \circ \iota'_\lambda$ を満たす A 線型写像 $\psi\colon S' \to S$ が一意に存在する。このとき、任意の λ に対して $(\psi\circ\phi)\circ\iota_\lambda = \psi\circ(\phi\circ\iota_\lambda) = \psi\circ\iota'_\lambda = \iota_\lambda$ が成り立つ。一方で、恒等写像 $\mathrm{id}_S\colon S \to S$ も $\mathrm{id}_S \circ \iota_\lambda = \iota_\lambda$ を満たす。S の普遍性における一意性（ここでは $X = S, h_\lambda = \iota_\lambda$ としたもの）より、$\psi\circ\phi = \mathrm{id}_S$ でなければならない。全く同様にして $\phi\circ\psi = \mathrm{id}_{S'}$ も従う。したがって ϕ は A 同型写像であり、普遍性を満たす対象は同型を除いて一意である。 $\square$

3　Hom 加群の普遍性と左完全性

【定理 3.1】Hom の引き戻し（反変性）と押し出し（共変性）

A 加群の間の A 線型写像 $f\colon M \to N$ が与えられたとき、任意の A 加群 X に対して以下の 2 つの A 線型写像が自然に誘導される。

(1) f は写像 $f^*\colon \mathrm{Hom}_A(N, X) \to \mathrm{Hom}_A(M, X)$ を誘導する。

$$f^*(\phi) = \phi \circ f \quad (\phi \in \mathrm{Hom}_A(N, X))$$

これを引き戻し（Pull-back）という。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "f^*(\phi)"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

(2) f は写像 $f_*\colon \mathrm{Hom}_A(X, M) \to \mathrm{Hom}_A(X, N)$ を誘導する。

$$f_*(\psi) = f \circ \psi \quad (\psi \in \mathrm{Hom}_A(X, M))$$

これを 押し出し（Push-out）という。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, dashed, "f_*(\psi)"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

証明

f^* および f_* が A 線型写像であることを示す。まず f^* について、任意の $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Hom}_A(N, X)$ および $a \in A$ に対し、

$$f^*(a\phi_1 + \phi_2) = (a\phi_1 + \phi_2) \circ f = a(\phi_1 \circ f) + (\phi_2 \circ f) = af^*(\phi_1) + f^*(\phi_2)$$

が各点での計算により成り立つため、f^* は A 線型写像である。次に f_* についても同様に、任意の $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Hom}_A(X, M)$ に対し、f の A 線形性を用いることで、

$$f_*(a\psi_1 + \psi_2) = f \circ (a\psi_1 + \psi_2) = a(f \circ \psi_1) + (f \circ \psi_2) = af_*(\psi_1) + f_*(\psi_2)$$

が成り立ち、f_* もまた A 線型写像であることが示される。 □

【定理 3.2】Hom 関手の左完全性

A 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

が与えられたとき、任意の A 加群 X に対して次の 2 つの系列は完全列になる。

(1)
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(X, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(X, M'')$$

(2)
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M', X)$$

証明

(1) を示す。系列が $\mathrm{Hom}_A(X, M)$ の所で完全であること、すなわち $\mathrm{Ker}\, g_* = \mathrm{Im}\, f_*$ を示す。まず、元の系列の完全性より $g \circ f = 0$ であるから、任意の $\psi \in \mathrm{Hom}_A(X, M')$ に対して $(g_* \circ f_*)(\psi) = g \circ f \circ \psi = 0$ となり、$\mathrm{Im}\, f_* \subseteq \mathrm{Ker}\, g_*$ である。逆に、$\chi \in \mathrm{Ker}\, g_*$ とすると、$g_*(\chi) = g \circ \chi = 0$ である。ここで、元の系列の完全性から $M' = \mathrm{Ker}\, g$ であり、$f\colon M' \to M$ は包含写像（と同一視できる単射）である。したがって、核の普遍性（$g \circ \chi = 0$ に対する一意存在性）より、$\chi = f \circ \zeta = f_*(\zeta)$ を満たす $\zeta\colon X \to M'$ が一意に存在する。これは $\chi \in \mathrm{Im}\, f_*$ を意味する。また、f が単射であることから $f_*(\psi) = f \circ \psi = 0 \implies \psi = 0$ も従い、$\mathrm{Hom}_A(X, M')$ の所での完全性（f_* の単射性）も示される。

(2) を示す。系列が $\mathrm{Hom}_A(M, X)$ の所で完全であること、すなわち $\mathrm{Ker}\, f^* = \mathrm{Im}\, g^*$ を示す。同様に $g \circ f = 0$ より、$(f^* \circ g^*)(\phi) = \phi \circ g \circ f = 0$ となり、$\mathrm{Im}\, g^* \subseteq \mathrm{Ker}\, f^*$ である。逆に、$\xi \in \mathrm{Ker}\, f^*$ とすると、$f^*(\xi) = \xi \circ f = 0$ である。元の系列の完全性から $M'' = \mathrm{Coker}\, f = M/\mathrm{Im}\, f$ であり、$g\colon M \to M''$ は自然な全射（と同一視できる写像）である。したがって、余核の普遍性（$\xi \circ f = 0$ に対する一意存在性）より、$\xi = \eta \circ g = g^*(\eta)$ を満たす $\eta\colon M'' \to X$ が一意に存在する。これは $\xi \in \mathrm{Im}\, g^*$ を意味する。また、g が全射であることから $g^*(\eta) = \eta \circ g = 0 \implies \eta = 0$ も従い、$\mathrm{Hom}_A(M'', X)$ の所での完全性（g^* の単射性）も示される。 □

（証明の際には、図式を書いて議論すると良い。）