

加群論・可換環論演習問題

@Metachick_2021

2026 年 7 月 25 日

加群論・可換環論の演習問題です。主な出題範囲は局所環、半単純環、加群の単純性、テンソル積、平坦加群などです。ホモロジー代数についての出題はありません。

1 問題

問題 1.1

R を可換局所環とし、 M, N を有限生成 R -加群とする。 M と N の R 上のテンソル積 $M \otimes_R N$ が 0 であるならば、 $M = 0$ または $N = 0$ であることを示せ。

問題 1.2

R を可換環、 I を R のイデアルとする。

- (1) 剰余環 R/I を R -加群とみなしたとき、これが平坦 R -加群であるならば $I = I^2$ が成り立つことを示せ。
- (2) R が局所環であるとき、 R/I が平坦 R -加群となるようなイデアル I をすべて決定せよ。

問題 1.3

環 R 上の左加群 M が直既約であるとは、 $M \neq 0$ であり、かつ M が 2 つの部分加群の直和として $M = M_1 \oplus M_2$ と書けるならば、 $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$ が成り立つことである。

- (1) R が半単純環であるとき、左 R -加群 M が直既約であることと、自己準同型環 $\text{End}_R(M)$ が可除環（斜体）になることは同値であることを示せ。
- (2) R を一般の環としたとき、(1) で述べた同値性は成り立つか。成り立つ場合は証明し、成り立たない場合は反例を 1 つ挙げよ。

問題 1.4

R を可換環とし、 I, J を R のイデアルで $I + J = R$ を満たすものとする。このとき、 R -加群としての準同型写像 $\phi: I \otimes_R J \rightarrow IJ$ として $\phi(x \otimes y) = xy$ を満たすものが存在することを示し、さらにこの ϕ が同型写像であることを示せ。

問題 1.5

R を可換環とし、 I を有限生成イデアルとする。 $I = I^2$ が成り立つとき、ある元 $e \in I$ が存在して $e^2 = e$ かつ $I = (e)$ となることを示せ。

問題 1.6

R を可換局所環、 $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとし、 M を非零の有限生成 R -加群とする。 M が巡回加群（単一の元で生成される加群）であるための必要十分条件は、「 M の任意の真の部分加群が $\mathfrak{m}M$ に含まれること」であることを示せ。

問題 1.7

R を環とする。左 R -加群としての R が、ある極大左イデアル $\mathfrak{m}$ とある極小非零左イデアル I の直和として $R = \mathfrak{m} \oplus I$ と分解されたとする。このとき、ある幂等元 $e \in R$ （すなわち $e^2 = e$ ）が存在して、 $I = Re$ が成り立つことを示せ。

問題 1.8

R を可換環とする。 R の元 a が非零因子であるとは、 $ab = 0$ を満たす $b \in R$ が $b = 0$ のみに限られることとする。

- (1) M が平坦かつ $a \in R$ が非零因子ならば、 M 上の a 倍写像が単射になることを示せ。
- (2) (1) の逆は成立するか。正しい場合は証明し、正しくない場合は反例を 1 つ挙げよ。

問題 1.9

R を可換局所環とし、 M, N を有限生成 R -加群とする。 M と N の R 上のテンソル積 $M \otimes_R N$ が、零でない巡回加群であるならば、 M および N もそれぞれ巡回加群であることを示せ。

問題 1.10

半単純環 R の左イデアルが全て両側イデアルでもあるとき、 R は有限個の斜体の直積に同型なことを示せ。

問題 1.11

R を可換局所環とする。有限生成 R -加群 M, N が R -加群としての同型 $M \oplus N \cong R$ を満たすとき、 $M = 0$ または $N = 0$ であることを示せ。

問題 1.1

R を可換局所環とし、 M, N を有限生成 R -加群とする。 M と N の R 上のテンソル積 $M \otimes_R N$ が 0 であるならば、 $M = 0$ または $N = 0$ であることを示せ。

解答

R の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とし、剰余体 $k = R/\mathfrak{m}$ を考える。右完全性より、 $M \otimes_R N = 0$ に k をテンソルすると、 $(M \otimes_R N) \otimes_R k \cong 0$ となる。一方で、テンソル積の結合性や性質から $(M \otimes_R N) \otimes_R k \cong (M \otimes_R k) \otimes_k (N \otimes_R k) \cong (M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (N/\mathfrak{m}N)$ が成り立つ。 $M/\mathfrak{m}M$ および $N/\mathfrak{m}N$ は体 k 上のベクトル空間であり、体上のテンソル積が 0 になるのは少なくとも一方が 0 のときに限られる（ベクトル空間のテンソル積の基底を考えれば良い）。したがって、 $M/\mathfrak{m}M = 0$ または $N/\mathfrak{m}N = 0$ である。 $M/\mathfrak{m}M = 0$ のとき $M = \mathfrak{m}M$ となる。 R は局所環なので $\mathfrak{m}$ は Jacobson 根基であり、 M は有限生成であるから、中山の補題より $M = 0$ を得る。 N についても同様である。◇

問題 1.2

R を可換環、 I を R のイデアルとする。

- (1) 剰余環 R/I を R -加群とみなしたとき、これが平坦 R -加群であるならば $I = I^2$ が成り立つことを示せ。
- (2) R が局所環であるとき、 R/I が平坦 R -加群となるようなイデアル I をすべて決定せよ。

解答

(1) を示す。 $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$ という完全列に対し、平坦加群 R/I をテンソルすると、 $0 \rightarrow I \otimes_R R/I \rightarrow R \otimes_R R/I \rightarrow R/I \otimes_R R/I \rightarrow 0$ も完全列になる。ここで $I \otimes_R R/I \rightarrow R \otimes_R R/I$ の写像は $x \otimes \bar{y} \mapsto 1 \otimes \overline{xy} = 0$ ($xy \in I$ より) となるため、零写像である。これが単射であることから $I \otimes_R R/I = 0$ 。また $I \otimes_R R/I \cong I/I^2$ であるから、 $I/I^2 = 0$ 、すなわち $I = I^2$ を得る。

(2) を示す。局所環上の有限生成平坦加群は自由加群であるという定理を用いる。 R/I は $1 + I$ で生成される有限生成 R -加群かつ平坦であるため、自由 R -加群となる。生成系が 1 元であるから、階数は 0 または 1 である。階数が 0 のときは $R/I = 0$ ゆえ $I = R$ 。階数が 1 のときは $R/I \cong R$ ゆえ $I = 0$ 。よって求めるイデアルは $I = 0, R$ のみである（この 2 つは実際に平坦性を満たす）。◇

問題 1.3

環 R 上の左加群 M が直既約であるとは、 $M \neq 0$ であり、かつ M が2つの部分加群の直和として $M = M_1 \oplus M_2$ と書けるならば、 $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$ が成り立つことである。

- (1) R が半単純環であるとき、左 R -加群 M が直既約であることと、自己準同型環 $\text{End}_R(M)$ が可除環（斜体）になることは同値であることを示せ。
- (2) R を一般の環としたとき、(1) で述べた同値性は成り立つか。成り立つ場合は証明し、成り立たない場合は反例を1つ挙げよ。

解答

(1) を示す。 R は半単純環なので、任意の加群は単純加群の直和に分解される。 M が直既約であるということは、この直和分解が1項からなる。すなわち M が単純加群であることと同値である。 M が単純加群であれば Schur の補題により $\text{End}_R(M)$ は可除環になる。逆に $\text{End}_R(M)$ が可除環であれば、自明でない冪等元を持たない。もし $M = M_1 \oplus M_2$ と分解できたとすると、 M_1 への射影 p_1 は $\text{End}_R(M)$ の冪等元となるため $p_1 = 0$ または $p_1 = \text{id}_M$ 。ゆえに $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$ となり、 M は直既約である。(2) を示す。一般の環では成り立たない。例えば、 $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ などを見るとよい。 $\mathbb{Z}$ の任意の2つの非零イデアルは交わりを持つ（例えば $(a) \cap (b) \supset (ab) \neq 0$ ）ため、 $\mathbb{Z} = M_1 \oplus M_2$ と直和分解することはできず、 $\mathbb{Z}$ は直既約である。しかし、 $\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であり、これは整域ではあるが可除環ではない。あるいは、 $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ などを考えても良いかと思う。◇

問題 1.4

R を可換環とし、 I, J を R のイデアルで $I + J = R$ を満たすものとする。このとき、 R -加群としての準同型写像 $\phi: I \otimes_R J \rightarrow IJ$ として $\phi(x \otimes y) = xy$ を満たすものが存在することを示し、さらにこの ϕ が同型写像であることを示せ。

解答

$I + J = R$ より、ある $i \in I$ と $j \in J$ が存在して $1 = i + j$ と書ける。写像 $\psi: IJ \rightarrow I \otimes_R J$ を、任意の $z \in IJ$ に対して $\psi(z) = i \otimes z + z \otimes j$ と定めれば、これは ϕ の逆写像になっていることが確認できる。したがって、 ϕ は同型。◇

問題 1.5

R を可換環とし、 I を有限生成イデアルとする。 $I = I^2$ が成り立つとき、ある元 $e \in I$ が存在して $e^2 = e$ かつ $I = (e)$ となることを示せ。

解答

I は有限生成なので、生成系を $x_1, \dots, x_n$ とする。仮定 $I = I^2 = I \cdot I$ より、各 x_i は $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ ($a_{ij} \in I$) と表せる。これをクロネッカーのデルタ δ_{ij} を用いて移行すると、 $\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j = 0$ となる。行列 $A = (\delta_{ij} - a_{ij})$ とし、その余因子行列を左から掛ける（行列式のトリック）ことで、任意の k について $(\det A) x_k = 0$ が得られる。 $\det A$ を展開すると、対角成分が $1 - a_{ii}$ であることから、 $\det A = 1 - e$ (ただし $e \in I$) の形になる。よって、 $(1 - e) x_k = 0$ 、すなわち $x_k = e x_k$ がすべての生成元について成り立つ。任意の $x \in I$ は生成元の線型結合であるから、 $x = e x$ となる。特に $e \in I$ 自身に適用すれば $e = e^2$ となる。また、任意の $x \in I$ に対して $x = e x$ であるから $x \in (e)$ ゆえ $I \subset (e)$ 。逆に $e \in I$ ゆえ $(e) \subset I$ 。したがって $I = (e)$ が示された。◇

問題 1.6

R を可換局所環、 $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとし、 M を非零の有限生成 R -加群とする。 M が巡回加群（単一の元で生成される加群）であるための必要十分条件は、「 M の任意の真の部分加群が $\mathfrak{m}M$ に含まれること」であることを示せ。

解答

$\Rightarrow$ を示そう。 M は巡回加群なので $M \cong R/I$ と表せる。 R は局所環なので、唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ。 M の部分加群は R の I を含むイデアル J に対応する。真の部分加群ならば $J \neq R$ であり、任意の真のイデアルは極大イデアルに含まれるため $J \subset \mathfrak{m}$ である。これらを剰余群に落とせば、対応する部分加群は $\mathfrak{m}/I = \mathfrak{m}(R/I) \cong \mathfrak{m}M$ に含まれる。次に、 $\Leftarrow$ を示す。対偶を示す。剰余体 $k = R/\mathfrak{m}$ を考えると、 $M/\mathfrak{m}M$ は k 上のベクトル空間である。中山の補題と M が巡回加群でないことより $\dim_k(M/\mathfrak{m}M)$ は 2 である。よって、 $M/\mathfrak{m}M$ は真の非零部分空間 W （例えば 1 次元の部分空間）を持つ。自然な射影 $\pi : M \rightarrow M/\mathfrak{m}M$ による W の逆像を $N = \pi^{-1}(W)$ とする。 W が真の部分空間なので N は M の真の部分加群である。一方で $W \neq 0$ より N は $\ker \pi = \mathfrak{m}M$ には含まれない。これが求める部分加群である。

問題 1.7

R を環とする。左 R -加群としての R が、ある極大左イデアル $\mathfrak{m}$ とある極小非零左イデアル I の直和として $R = \mathfrak{m} \oplus I$ と分解されたとする。このとき、ある幂等元 $e \in R$ (すなわち $e^2 = e$) が存在して、 $I = Re$ が成り立つことを示せ。

解答

$1 \in R$ を直和分解 $R = \mathfrak{m} \oplus I$ に従って $1 = x + e$ ($x \in \mathfrak{m}, e \in I$) と表す。両辺に左から e を掛けると、 $e = ex + e^2$ となる。これを変形すると $e - e^2 = ex$ となる。 I は左イデアルなので $e, e^2 \in I$ ゆえ左辺 $e - e^2 \in I$ 。一方 $\mathfrak{m}$ も左イデアルなので $x \in \mathfrak{m} \implies ex \in \mathfrak{m}$ 。したがって $e - e^2 \in I \cap \mathfrak{m}$ となるが、直和であるため $I \cap \mathfrak{m} = \{0\}$ である。よって $e - e^2 = 0$ すなわち $e^2 = e$ が得られる。次に $I = Re$ を示す。 $e \in I$ より $Re \subset I$ は明らか。ここで $e = 0$ と仮定すると $1 = x \in \mathfrak{m}$ となり、 $\mathfrak{m} = R$ となって極大イデアル (真のイデアル) であることに矛盾する。ゆえに $e \neq 0$ であり、 $Re \neq 0$ である。 I は極小非零左イデアルであり、その中に非零左イデアル Re が含まれるのだから、直ちに $I = Re$ でなければならない。◇

問題 1.8

R を可換環とする。 R の元 a が非零因子であるとは、 $ab = 0$ を満たす $b \in R$ が $b = 0$ のみに限られることとする。

- (1) M を平坦 R -加群とする。 R の元 a が非零因子であるとき、 M においても a 倍写像 ($x \mapsto ax$) が単射になることを示せ。
- (2) (1) の逆は成立するか。正しい場合は証明し、正しくない場合は反例を1つ挙げよ。

解答

(1) R の元 a が非零因子であることは、左 R -加群の完全列 $0 \rightarrow R \xrightarrow{\times a} R$ が存在することと同値である。 M は平坦加群であるから、この完全列に $\otimes_R M$ を施しても完全性は保たれる。 $R \otimes_R M \cong M$ であるから、テンソル後の列は $0 \rightarrow M \xrightarrow{\times a} M$ となる。これが完全であることは、写像 $x \mapsto ax$ が単射であることを意味する。(2) について、これは成立しない。体 k 上の多項式環 $R = k[x, y]$ と、そのイデアル $M = (x, y)$ を考える。 R は整域であるから、非零元はすべて非零因子である。 M は R の部分加群であるから、任意の非零元 a による a 倍写像は当然単射である。しかし M は平坦加群ではない。もし平坦加群であれば、完全列 $0 \rightarrow M \rightarrow R$ に R/M をテンソ

ルした写像 $M \otimes_R R/M \rightarrow R \otimes_R R/M$ も単射になるはずである。 $R \otimes_R R/M \cong R/M$ であり、写像は $m \otimes \bar{r} \mapsto \overline{mr} = 0$ ($m \in M$ ゆえ) となるため、この写像の像は常に 0 である。単射であるためには $M \otimes_R R/M = 0$ でなければならないが、 $M \otimes_R R/M \cong M/M^2 = (x, y)/(x^2, xy, y^2)$ であり、これは k 上基底 $\bar{x}, \bar{y}$ を持つ 2 次元ベクトル空間であるため 0 ではない。これは矛盾であり、 M は平坦ではない。

問題 1.9

R を可換局所環とし、 M, N を有限生成 R -加群とする。 M と N の R 上のテンソル積 $M \otimes_R N$ が、零でない巡回加群であるならば、 M および N もそれぞれ巡回加群であることを示せ。

解答

M の唯一の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とし、 $k = R/\mathfrak{m}$ とする。 $M \otimes_R N$ の生成元を x とすると、 $I = \text{Ann}(x)$ として $M \otimes_R N \cong R/I$ が成り立つ。これより、 $(M \otimes_R N) \otimes k \cong R/(I + \mathfrak{m}) = k$ である。一方で、簡単な計算により $(M \otimes_R N) \otimes k \cong (M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (N/\mathfrak{m}N)$ が成り立つ。いま、これが k に同型であるので、 k -ベクトル空間としての次元は 1 である。ベクトル空間のテンソル積の理論により、 $\dim_k(M/\mathfrak{m}M) = 1$ である。これと、中山の補題 (の系) より、 M の生成元として 1 元からなるものを取れるから M は巡回加群。 N についても同様。◇

問題 1.10

半単純環 R の左イデアルが全て両側イデアルでもあるとき、 R は有限個の斜体の直積に同型であることを示せ。

解答

R は半単純環であるから、Artin-Wedderburn の定理により $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_m}(D_m)$ (D_i は可除環) と直積分解される。ある i について $n_i \geq 2$ であったと仮定し、行列環 $M_{n_i}(D_i)$ において 1 列目の成分のみが非零であるような行列の集合を I とする。 I は $M_{n_i}(D_i)$ の左イデアル (したがって R の左イデアル) であるが、右から $(1, 2)$ -成分のみが 1 である行列 E_{12} を掛けると、1 列目の成分が 2 列目に移動するため I に収まらない。ゆえに I は右イデアルではなく、両側イデアルにならない。これは「任意の左イデアルは両側イデアルである」という仮定に矛盾する。したがって、すべての i について $n_i = 1$ でなければならない、 $R \cong D_1 \times \cdots \times D_m$ を得る。

問題 1.11

R を可換局所環とする。有限生成 R -加群 M, N が R -加群としての同型 $M \oplus N \cong R$ を満たすとき、 $M = 0$ または $N = 0$ であることを示せ。

解答

同型 $M \oplus N \cong R$ は、自然な射影 $p : R \rightarrow M$ と埋め込み $i : M \rightarrow R$ の合成 $\phi = i \circ p : R \rightarrow R$ を誘導する。 ϕ は R -加群としての自己準同型写像であるから、任意の $r \in R$ に対して $\phi(r) = r\phi(1)$ が成り立つ。 $e = \phi(1)$ とおく。 M への射影の性質から $\phi \circ \phi = \phi$ であるため、 $e = \phi(1) = \phi(\phi(1)) = \phi(e) = e\phi(1) = e^2$ となり、 e は R の幂等元である。 $e(1-e) = 0$ であり、 R は局所環であるから、唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ。もし $e \in \mathfrak{m}$ かつ $1-e \in \mathfrak{m}$ ならば、その和である $1 \in \mathfrak{m}$ となり矛盾する。したがって、 $e \notin \mathfrak{m}$ または $1-e \notin \mathfrak{m}$ のいずれか一方が成り立つ（局所環では極大イデアルに属さない元は単元である）。 e が単元の時、 $e^2 = e$ の両辺に逆元を掛けて $e = 1$ 。このとき $\phi = \text{id}_R$ となり、 $R \rightarrow M$ が同型になるため、 $N = 0$ 。 $1-e$ が単元の時、 $e(1-e) = 0$ の両辺に逆元を掛けて $e = 0$ 。このとき $\phi = 0$ となり、 $M = 0$ ゆえ $N \cong R$ 。以上より、 $M = 0$ または $N = 0$ である。◇