
不偏ゲームと様々な形の Nim

@Metachick_2021

2026 年 9 月 8 日

Nim に代表される不偏ゲームは、組合せゲーム理論における基本的なゲームのクラスの一つである。ここでは、重要な概念である Grundy 数とその周辺の知識を紹介し、最後に様々な Nim の派生形を紹介する。

1 不偏ゲームの基礎と Grundy 数

【定義 1.1】ゲームのグラフ

2 人のプレイヤーが交互に手を行う組合せゲームに対して、次のようにして定まる有向グラフ $G = (V, E)$ をゲームのグラフという。

- 頂点集合 V : ゲームの起こり得るすべての局面の集合。
- 有向辺集合 $E \subseteq V \times V$: 1 手で行える合法的な状態遷移。有向辺 $(u, v) \in E$ (以下 $u \rightarrow v$ と表記) は、状態 u から状態 v へ 1 手で遷移可能であることを表す。
- 終端状態 : 出次数が 0 である頂点 $u \in V$ 。すなわち、 $u \rightarrow v$ なる v が存在しない状態。

【定義 1.2】不偏ゲーム (Impartial Game)

組合せゲームのうち、以下の条件を満たすものを不偏ゲームと呼ぶ。

1. 2 人のプレイヤーが交互に手を行う。
2. 完全情報ゲームである。すなわち、偶然の要素が存在せず、両プレイヤーがゲームの全情報を共有している。
3. 有限回の操作でゲームが終了する。
4. どの状態 $u \in V$ においても、遷移可能な状態の集合 $\{v \in V \mid u \rightarrow v\}$ が手番のプレイヤーによらず完全に同一である。
5. 正規形式に従う。すなわち、自分の手番で合法手が存在しない (終端状態に到達した) プレイヤーを負けとし、最後の合法手を行ったプレイヤーを勝ちとする。

有限回の操作でゲームが終了することは有向グラフ G が有限かつループを持たない有向非巡回グラフ (DAG) であることを意味する。

例えば、チェスや将棋は条件 3 により、は偏ゲームであり、不偏ゲームではない。一方、Nim や石取りゲームのようにどちらの手番であっても同じ山から石を取れるようなゲームは不偏ゲームである。

▶▶ 1.1 mex と Grundy 数

不偏ゲームの各状態の「勝勢の度合い」を数理的に評価するため、mex 演算および Grundy 数を以下のように定義する。

【定義 1.3】 mex (Minimum Excluded value)

非負整数の有限部分集合 $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、 $\text{mex}(S)$ を「 S に含まれない最小の非負整数」と定義する。

$$\text{mex}(S) = \min\{x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid x \notin S\}$$

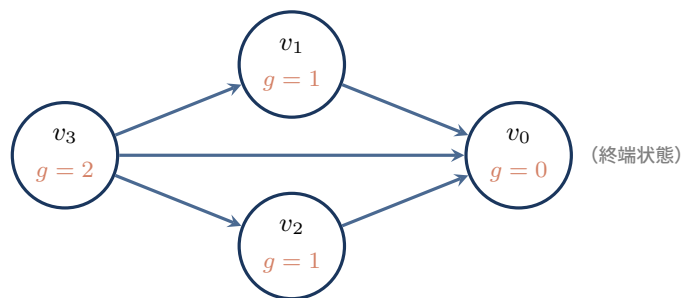
【定義 1.4】 Grundy 数

グラフ $G = (V, E)$ で表される不偏ゲームの各頂点 $u \in V$ に対し、Grundy 数 $g(u)$ を以下のように定義する。

$$g(u) = \text{mex}(\{g(v) \mid u \rightarrow v\})$$

ここで、 $u \rightarrow v$ は u から 1 手で遷移可能な直後状態 v 全体をわたる。特に、遷移先が存在しない終端状態 u では $\{g(v) \mid u \rightarrow v\} = \emptyset$ となり、 $g(u) = \text{mex}(\emptyset) = 0$ である。

例えば、以下の 4 局面からなるゲームの Grundy 数は次のようになる：



定義に関する注意

Note

ゲームを表すグラフが DAG であるため、頂点集合 V はトポロジカルソート可能である。したがって、出次数 0 の終端状態からトポロジカル順序の逆順に順次評価していくことで、すべての頂点 $u \in V$ に対して Grundy 数 $g(u)$ が一意かつ矛盾なく定まる。

▶▶ 1.2 ゲームの決定性と Grundy 数の性質

不偏ゲームはそのグラフが DAG であるため、後退解析により引き分けが存在しない。したがって、任意の局面 $u \in V$ は、適切な着手によって手番側が必ず勝てる先手必勝状態 (N-position, Next-player win) か、どのように着手しても相手側が勝つ後手必勝状態 (P-position, Previous-player win) のいずれか一方に必ず分類される。Grundy 数 $g(u)$ は、この P-position と N-position の判別において以下の重要な特徴を持つ。

【命題 1.5】 Grundy 数と必勝状態の同値性

DAG $G = (V, E)$ で表される不偏ゲームの任意の局面 $u \in V$ について、以下が成り立つ。

1. $g(u) = 0 \iff u$ は P-position (後手必勝状態) である。
2. $g(u) > 0 \iff u$ は N-position (先手必勝状態) である。

証明

1 についてのみ示せば良い。DAG 上のトポロジカル順序の逆順を用いて証明する。終端状態 u では Grundy 数の定義より $g(u) = 0$ である。正規形式のルールにより、手番のプレイヤーは合法手が存在せず負けとなるため、 u は P-position である。よって成り立つ。以後、非終端状態 u について議論する。

u から 1 手で遷移可能なすべての直後状態 v ($u \rightarrow v$) について、すでに主張が成り立っていると仮定する。 $g(u) = 0$ のとき、mex の定義より、 $0 \notin \{g(v) \mid u \rightarrow v\}$ である。したがって、 u から遷移可能な任意の直後状態 v について $g(v) > 0$ が成り立つ。帰納法の仮定より、任意の v は N-position である。手番のプレイヤーがどのように操作しても、相手に N-position を渡してしまうため、局面 u は P-position である。

$g(u) > 0$ のとき、mex の定義より、 $0 \in \{g(v) \mid u \rightarrow v\}$ である。したがって、 $g(v) = 0$ となる直後状態 v が少なくとも 1 つ存在する。帰納法の仮定より、この v は P-position である。現在のプレイヤーはこの v へ遷移する手を選ぶことで、相手に P-position を押し付けることができるため、局面 u は N-position である。以上より、すべての局面 $u \in V$ について題意が示された。□

▶▶ 1.3 ゲームの和と Sprague-Grundy 定理

独立した複数の不偏ゲーム $G_1, G_2, \dots, G_N$ が並行して存在し、プレイヤーは自分の手番でいずれか 1 つのゲームを選んで手を進めるゲームを「ゲームの和 (Sum of Games)」と呼ぶ。

【定理 1.6】 Sprague-Grundy 定理

N 個の独立な不偏ゲームの現在の状態をそれぞれ $u_1, u_2, \dots, u_N$ とする。和ゲーム全体の Grundy 数 $g(u_1, u_2, \dots, u_N)$ は、各独立なゲームの Grundy 数の XOR (排他的論理和) に等しい。

$$g(u_1, u_2, \dots, u_N) = g(u_1) \oplus g(u_2) \oplus \dots \oplus g(u_N)$$

証明

和ゲームの状態 $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ に対し、DAG 上のトポロジカル順序に関する帰納法を用いて証明する。終端状態 $v = (v_1, \dots, v_N)$ では各 $g(v_i) = 0$ であり、 $g(v) = 0 = 0 \oplus \dots \oplus 0$ となって所望の結果が成立する。 u から 1 手で遷移可能な任意の直後状態 $u' = (u'_1, \dots, u'_N)$ について、すでに定理が成り立ち、 $g(u') = g(u'_1) \oplus \dots \oplus g(u'_N)$ であると仮定する。

和ゲーム全体の Grundy 数 $g(u)$ の定義は $g(u) = \text{mex}(\{g(u') \mid u \rightarrow u'\})$ である。帰納法の仮定を適用すると、1 手で遷移可能な状態の Grundy 数の集合 S は、 $S = \{g(u'_1) \oplus \dots \oplus g(u'_N) \mid u \rightarrow u'\}$ と書き直せる。ここで $X = g(u_1) \oplus \dots \oplus g(u_N)$ とおく。定義より $g(u) = X$ すなわち $\text{mex}(S) = X$ を示すには、 S が以下の 2 条件を満たすことを直接確認すればよい。

1. $X \notin S$ (S に X 自身は含まれない)
2. $\forall X' < X, X' \in S$ (X より小さい任意の非負整数 X' は必ず S に含まれる)

条件 1 ($X \notin S$) の証明:

和ゲームの 1 手は、いずれか 1 つのゲーム i の状態を u_i から u'_i ($u_i \rightarrow u'_i$) へ変化させ、他のゲームの状態は維持する操作である。この遷移後の Grundy 数の XOR 和は $X_{\text{new}} = X \oplus g(u_i) \oplus g(u'_i)$ となる。単一のゲームにおける Grundy 数の定義 $g(u_i) = \text{mex}(\{g(u'_i) \mid u_i \rightarrow u'_i\})$ より、 u_i から 1 手で到達できる状態の Grundy 数が $g(u_i)$ と等しくなることはない。したがって、 $g(u_i) \oplus g(u'_i) \neq 0$ であり、 $X_{\text{new}} \neq X$ となる。ゆえに $X \notin S$ である。

条件 2 ($\forall X' < X, X' \in S$) の証明：

任意に $X' < X$ をとる。 $d = X \oplus X'$ とおくと、 $X' < X$ より d の最上位ビット (1 である最も上の桁) において X のビットは 1、 X' のビットは 0 である。 $X = g(u_1) \oplus \cdots \oplus g(u_N)$ であるから、 d の最上位ビットと同じ桁のビットが 1 となっている Grundy 数を持つゲームが存在する。その 1 つを u_i とする。このとき $g(u_i) \oplus d < g(u_i)$ が成り立つ。単一ゲーム u_i の Grundy 数の定義より、mex の性質から $g(u_i)$ より小さい任意の非負整数へ 1 手で遷移できる。よって $g(u'_i) = g(u_i) \oplus d$ となる遷移 $u_i \rightarrow u'_i$ が存在する。この遷移を選んだときの和ゲーム全体の Grundy 数は、

$$X \oplus g(u_i) \oplus g(u'_i) = X \oplus g(u_i) \oplus (g(u_i) \oplus d) = X \oplus d = X'$$

となる。ゆえに $X' \in S$ である。以上より、集合 S に含まれない最小の非負整数は X である。したがって $\text{mex}(S) = X$ となり、Grundy 数の定義通り $g(u) = X$ であることが示された。□

Sprague-Grundy 定理は、どれほど複雑な規則を持つ不偏ゲームであっても、そのゲームの各状態はそれと同じ Grundy 数を持つ「石が 1 山の Nim」と完全に同値であるという極めて重要な事実を主張している。これにより、複数の不偏ゲームが合わさった複雑なゲームの解析が、単にそれぞれの Grundy 数の XOR 和を計算するだけに帰着される。

2 標準的な Nim

Nim は石取りゲームとも呼ばれており、歴史的には、最初に必勝法が数学的に解決したゲームである。まずルールを説明し、その後に必勝条件・戦略について説明する。

【定義 2.1】標準的な Nim のルール

N 個の山があり、それぞれの山には $A_1, A_2, \dots, A_N$ 個の石が積まれている。2 人のプレイヤーが交互に以下の操作を行う。

- 石が 1 個以上残っている山を 1 つ選び、その山から 1 個以上の石を取り除く。

正規形式に従い、先に操作を行えなくなったプレイヤーの負けとなる。

定義を一つずつ確認することによって、Nim は不偏ゲームであることがわかる。したがって、Grundy 数や Sprague-Grundy の定理を用いることができる。

【定理 2.2】 Nim の必勝条件

各山の石の数の XOR 和（排他的論理和）を $X = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N$ とおく。 $X \neq 0$ ならば先手必勝、 $X = 0$ ならば後手必勝である。

証明

標準的な Nim は、「1 つの山から石を取る」という独立した N 個の不偏ゲーム（1 山の Nim）の和ゲームであるとみなせる。したがって、Sprague-Grundy の定理により、ゲーム全体の Grundy 数は各独立なゲーム（各山）の Grundy 数の XOR 和 となる。

まず、石が x 個ある 1 つの山からなる Nim の Grundy 数 $g(x)$ を考える。1 回の操作で、石の数を 0 個以上 $x - 1$ 個以下の任意の数 y に減らすことができる。したがって、遷移可能な直後状態の Grundy 数の集合は $\{g(0), g(1), \dots, g(x - 1)\}$ となる。定義より終端状態は $g(0) = 0$ であり、数学的帰納法を用いると、 $g(x) = \text{mex}(\{0, 1, \dots, x - 1\}) = x$ となることが容易に示せる。すなわち、「石が x 個ある山の Grundy 数は x そのもの」である。

これより、Nim 全体の Grundy 数 X は、各山の石の数をそのまま用いて次のように表される。

$$X = g(A_1) \oplus g(A_2) \oplus \cdots \oplus g(A_N) = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N$$

前節で示した「Grundy 数と必勝状態の同値性」の命題より、全体の Grundy 数 $X > 0$ （すなわち $X \neq 0$ ）のとき先手必勝（N-position）、 $X = 0$ のとき後手必勝（P-position）となることが示された。 $\square$

必勝戦略としては、Grundy 数が 0 の状況を相手に常に押し付ければ良い。その具体的な方法は Sprague-Grundy の定理の証明を思い出せば明快である。すなわち、Grundy 数 X の最上位ビットと同じビットが立っている山（このような山は必ず存在する）を選択して、 $A_i - (A_i \oplus X)$ 個の石を取れば良い。

計算量に関する圧倒的なメリット**Note**

ゲームの必勝法を後退解析などで全探索しようとする、調べるべき状態の数は山の数 N に対して指数関数的に増加する。しかし、Sprague-Grundy 定理を利用すれば $O(N)$ （線形時間）で必勝判定と最適な手の選択が可能になる。

3 Nim の派生形

▶▶ 3.1 個数制限付き Nim

各山から 1 度にとれる石の数の上限 K 個まで」という制限がついた Nim を考える。この問題は現時点の知識で比較的容易に必勝判定を導出することができる。自身の手で導出してみたい場合には、一度手を止めて考えてみてほしい。

【定義 3.1】 個数制限付き Nim のルール

N 個の山があり、それぞれの山には $A_1, A_2, \dots, A_N$ 個の石が積まれている。正整数 K が与えられており、プレイヤーは交互に以下の操作を行う。

- 石が 1 個以上残っている山を 1 つ選び、1 個以上 K 個以下の石を取り除く。

正規形式に従い、操作を行えなくなったプレイヤーの負けとなる。

【命題 3.2】 1 山の個数制限付き Nim の Grundy 数

石が x 個ある 1 つの山からなる「個数制限付き Nim」の Grundy 数を $g(x)$ とすると、次が成り立つ。

$$g(x) = x \bmod (K + 1)$$

DAG を書いて一つずつ Grundy 数を割り振っていけば上の結論が得られる。厳密に証明する場合には、帰納法を用いれば良い。具体的な必勝戦略については、1 山の Nim の場合には、 A_1 が $K + 1$ の倍数であれば後手必勝である。先手が c 個 ($1 \leq c \leq K$) の石を取っても、後手がすかさず $(K + 1) - c$ 個の石を取ることで、常に残りの石の数を $K + 1$ の倍数に保つことができる。

【定理 3.3】 個数制限付き Nim の必勝条件

$X = (A_1 \bmod (K + 1)) \oplus (A_2 \bmod (K + 1)) \oplus \dots \oplus (A_N \bmod (K + 1))$ としたとき、 $X \neq 0$ ならば先手必勝、 $X = 0$ ならば後手必勝である。

Sprague-Grundy の定理から、Grundy 数は 1 山の個数制限付き Nim の Grundy 数の XOR で与えられる。また、上で挙げた X は Grundy 数そのものである。

▶▶ 3.2 階段 Nim (Staircase Nim)

「石を取り除く」のではなく「隣の山へ移動させる」という構造を持つ Nim の変種である。

【定義 3.4】 階段 Nim のルール

0 番目から N 番目までの $N + 1$ 個の台座（段）があり、1 番目から N 番目までの各段に $A_1, A_2, \dots, A_N$ 個のコインが置かれている（0 番目の段はコインを入れる箱であり、初期状態でコインがあってもよい）。2 人のプレイヤーは交互に以下の操作を行う。

- コインが 1 個以上ある段 i ($1 \leq i \leq N$) を 1 つ選ぶ。
- 選んだ段から 1 個以上のコインを取り、1 つ下の段 $i - 1$ へ移動させる。

操作を行えなくなったプレイヤーの負けとなる。

一見するとコインの総数が減らないため複雑に見えるが、実は奇数番目の段のコインのみを考慮した標準的な Nim と同値になる。

【定理 3.5】 階段 Nim の必勝条件

奇数番目の段にあるコインの枚数の XOR 和を $X = A_1 \oplus A_3 \oplus A_5 \oplus \dots$ とおく。 $X \neq 0$ ならば先手必勝、 $X = 0$ ならば後手必勝である。

証明

奇数番目の段にあるコインの山を「Nim の山」とみなし、偶数番目の段（0 番目の段を含む）にあるコインを「捨て場」とみなす。相手が奇数番目の段 i からコインを動かした場合は、標準的な Nim において山 i から石を取り除いて減らす操作と完全に等価である。すなわち、コインは偶数段 $i - 1$ に移動するため、奇数段の視点からは消滅したとみなせる。逆に、相手が偶数番目の段 j からコインを動かした場合にはコインは奇数段 $j - 1$ に移動するため、奇数段のコインが増加する操作となる。しかし、この場合はすかさず同じ枚数のコインを段 $j - 1$ から段 $j - 2$ （偶数段）へ移動させることで、奇数段の状態（XOR 和）を完全に元に戻すことができる。したがって、偶数段からの移動は勝利条件に影響を与えず、奇数段のコインのみを対象とした標準的な Nim の考察に帰着される。□

同様の手順で、山に自分の持っている有限個の石をいくつか選んで置くことができるような Nim も考察できる。具体的には、相手が置いた石を次のターンですかさず捨てれば良い。

▶▶ 3.3 Lasker の Nim

石を捨てる操作の他に、山を分割する操作を許した Nim も Grundy 数を用いて簡潔に必勝条件を表すことができることが知られている。

【定義 3.6】 Lasker の Nim のルール

N 個の山があり、それぞれの山には $A_1, A_2, \dots, A_N$ 個の石が積まれている。プレイヤーは交互に以下のいずれかの操作を行う。

- 石が 1 個以上残っている山を 1 つ選び、1 個以上の石を取り除く。
- 石が 2 個以上ある山を 1 つ選び、その山の石を 1 つも捨てずに 2 つの空でない山に分割する。

操作を行えなくなったプレイヤーの負けとなる。

山の分割が許されているため、操作のたびに山の総数が増加する可能性があるが、それぞれの山の石の数は必ず元の山より少なくなるため、ゲームは有限回で終了する。

【命題 3.7】 Lasker の Nim の Grundy 数

石が x 個ある 1 つの山の Grundy 数を $g(x)$ とすると、以下の規則が成り立つ。

$$g(x) = \begin{cases} x & (x \equiv 1, 2 \pmod{4}) \\ x+1 & (x \equiv 3 \pmod{4}) \\ x-1 & (x \equiv 0 \pmod{4}) \end{cases}$$

山が分割される操作であっても、分割された 2 つの山はそれぞれ独立したゲームとして扱えるため、Sprague-Grundy の定理により遷移先の Grundy 数は 2 つの山の Grundy 数の XOR 和として計算できることに注意すれば、帰納法によって証明を与えることができる。

【定理 3.8】 Lasker の Nim の必勝条件

各山 A_i の Grundy 数を上記の $g(A_i)$ とする。全体の Grundy 数の XOR 和を $X = g(A_1) \oplus g(A_2) \oplus \dots \oplus g(A_N)$ としたとき、 $X \neq 0$ ならば先手必勝、 $X = 0$ ならば後手必勝である。

このような非自明なゲームであっても、Grundy 数と Sprague-Grundy の定理を用いれば明快に必勝条件を理解することができる。

▶▶ 3.4 逆形 Nim

正規形式（最後の石を取った人が勝ち）ではなく、「最後の石を取った人が負け」というルールに変更した Nim を逆形 Nim と呼ぶ。一般に、Grundy 数は正規形式を前提として定義されているため、逆形式では直接 Grundy 数の定義を適用することはできない。しかし、特定の場合には依然として Grundy 数が役立つことがある。その一例として、逆形 Nim を紹介する。

【定義 3.9】 逆形 Nim のルール

標準的な Nim と操作は同一であるが、最後の石を取ったプレイヤーを負けとし、もう一方のプレイヤーを勝ちとする。

【定理 3.10】 逆形 Nim の必勝条件

各山の石の数の XOR 和を $X = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N$ とする。

1. すべての山の石の数が 1 以下の場合:
石が 1 個の山の個数が偶数ならば先手必勝、奇数ならば後手必勝である。
2. 石の数が 2 以上の山が少なくとも 1 つ存在する場合:
標準的な Nim と全く同じであり、 $X \neq 0$ ならば先手必勝、 $X = 0$ ならば後手必勝である。

証明

1. すべての山の石の数が 1 以下の場合：

各プレイヤーは自分のターンで、必ず「石が 1 個の山から 1 個の石を取る」という操作しかできない。すなわち、手番が進むごとに石が 1 個の山がちょうど 1 つずつ減少していく。最後の石を取ったプレイヤーが敗北するため、初期状態における石が 1 個の山の総数を m とすると、 m 個目の石を取るプレイヤーは m が奇数ならば先手、偶数ならば後手となる。したがって、 m が偶数ならば先手の勝利（先手必勝）、 m が奇数ならば後手の勝利（後手必勝）となる。

2. 石の数が 2 以上の山が少なくとも 1 つ存在する場合：

基本的には正規形式の Nim（以下、正規 Nim）と同じ戦略、すなわち「自分のターン終了時に XOR 和 $X = 0$ にする」という戦略をとる。 $X \neq 0$ の場合、先手は正規 Nim の必勝手（ $X = 0$ にする操作）を行い続ける。後手はどのように操作しても必ず $X \neq 0$ となる。ゲームは有限であるため、この手順を続けると、いずれかの時点で「石の数が 2 以上の山がちょうど 1 つだけで、残りの山はすべて 1 個以下」という状態に必ず到達する。 $X = 0$ の状態で

は「石の数が 2 以上の山がちょうど 1 つ」になることはあり得ないことに注意すると、後手が $X = 0$ の状態で手番を迎える限り、「2 以上の山が 1 つだけ」の状態に直面するのは、常に先手であることがわかる。先手はこの状態に直面したとき、正規 Nim の戦略 ($X = 0$ にする) を放棄し、唯一の 2 以上の山から石を取り、「すべての山の石が 1 以下」かつ「石が 1 個の山の総数が奇数個」になるように調整する (その山を 0 個にするか 1 個にするかの選択により、必ず奇数個に調整可能である)。これにより、相手にケース 1 の後手必勝の盤面を押し付けることができるため、先手必勝となる。逆に、初期状態で $X = 0$ の場合、先手はどのように操作しても $X \neq 0$ の状態しか作れない。すると、後手が上記の「先手の戦略」をそのまま実行できる立場になるため、後手必勝となる。 $\square$

▶ 3.5 Nim_K

標準的な Nim の「1 回のターンで 1 つの山を選ぶ」というルールを「1 回のターンで最大 K 個の山を選べる」ように拡張したものが Nim_K である。

【定義 3.11】 Nim_K のルール

N 個の石の山があり、それぞれの山に $A_1, A_2, \dots, A_N$ 個の石がある。2 人のプレイヤーは交互に以下の操作を行う。

- 1 個以上 K 個以下の山を選ぶ ($1 \leq K \leq N$)。
- 選んだそれぞれの山から、1 個以上の石を取り除く (選んだ山ごとに取り除く石の数は異なってもよい)。

操作を行えなくなったプレイヤーの負けとなる。

通常の Nim が 2 進数表記の各桁ごとの排他的論理和、すなわち $\text{mod } 2$ での和で必勝判定できたのに対し、 Nim_K では「各桁ごとの $\text{mod}(K+1)$ の和」を用いる。

【定理 3.12】 Nim_K の必勝条件

各山の石の数 A_i を 2 進数で表し、下から j 桁目のビットが 1 になっている山の個数を S_j とする。すべての桁 j において $S_j \equiv 0 \pmod{K+1}$ であれば後手必勝、そうでない桁が 1 つでもあれば先手必勝である。

一見複雑かつ天下りの見えるが、通常の Nim、あるいは Sprague-Grundy の定理とアイデアは類似している。

証明

すべての桁で $S_j \equiv 0 \pmod{K+1}$ となっている状態を「必敗状態」、そうでない状態を「必勝状態」と呼ぶ。以下の 2 点を示せばよい。

1. 必敗状態からの操作は必ず必勝状態になる：

プレイヤーは 1 回の操作で 1 個以上 K 個以下の山を選び、石を減らす。この操作によってビットに変化が生じた最も上の桁を M とする。桁 M より上の桁のビットは一切変化しないため、桁 M においてビットが変化した山は、すべて「石が減ったことによって 1 から 0 へ変化した山」である。このような山の個数を m とすると、選べる山の制限から $1 \leq m \leq K$ である。したがって、桁 M におけるビット 1 の個数 S_M はちょうど m だけ減少する。

もともと $S_M \equiv 0 \pmod{K+1}$ であったため、ちょうど $1 \leq m \leq K$ だけ減少した後の値が再び $K+1$ の倍数になることはない。したがって、少なくとも桁 M において $\text{mod}(K+1)$ が 0 でなくなるため、操作後は必ず必勝状態へ遷移する。

2. 必勝状態から、必ず必敗状態へ遷移する手が存在する：

条件を満たさない ($S_j \not\equiv 0 \pmod{K+1}$) 最上位の桁から順に下へ見ていく。ある桁で余りを相殺するために、その桁のビットが 1 である山をいくつか選び、ビットを 0 にする。重要な性質として、ある桁でビットを 1 から 0 に減らした山は、それより下位の桁を自由に 0 にも 1 にも変更できる「調整用の山」として扱うことができる（どのように変更しても、石の総数は確実に減るため）。

下位の桁に進むにつれて、もし手持ちの「調整用の山」のビット変更だけで $\text{mod}(K+1)$ の余りを 0 にできない場合は、新たに別の山のビットを 1 から 0 にして「調整用の山」に追加していく。いずれの桁においても、余りを相殺するために必要な「調整用の山」の数は最大でも K 個である。たがって、この手順を繰り返しても、選ばれる山の総数が K 個を超過することは決してなく、必ず全体の操作を $1 \leq m \leq K$ 個の山の変更で完了できる。 $\square$

このように、必勝状態と必敗状態を定義して

- 必敗状態からは任意の操作で必勝状態へ遷移すること
- 必勝状態からはある操作が存在して、必敗状態へ遷移できること

の二つを示す手法はこの手の話題では典型的である。必敗状態に関しては、小さいケースでコンピュータなどを用いて Grundy 数を計算することによって予想することができる。

▶▶ 3.6 フィボナッチ Nim (Fibonacci Nim)

ここまでは複数の山から石を取る Nim を見てきたが、フィボナッチ Nim は 1 つの山だけで行う特殊な Nim である。Grundy 数以外の道具で解析できる Nim の例である。

【定義 3.13】フィボナッチ Nim のルール

1 つの山に N 個の石がある。2 人のプレイヤーは交互に石を取り除く。

- **初手**：先手は、1 個以上 $N - 1$ 個以下の石を取ることができる。
- **2 手目以降**：各プレイヤーは、直前のプレイヤーが取った石の数の **2 倍以下の個数** の石を取ることができる。

最後に石を取ったプレイヤーの勝ちとなる。

本ゲームを解析するにあたり、以下の 2 つの重要な定理・性質を用いる。ここで扱うフィボナッチ数列は $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$ (すなわち 1-indexed) とする。

【定理 3.14】Zeckendorf の定理

任意の正整数 N は、連続しない（隣り合わない）フィボナッチ数の和として一意に表すことができる。

$$N = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_m} \quad (k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 2, \text{ かつ } k_i - k_{i+1} \geq 2)$$

この和の形式を N の **Zeckendorf 表現** と呼ぶ。

【命題 3.15】フィボナッチ数列の性質

フィボナッチ数列および Zeckendorf 表現において、以下の関係が成り立つ。

1. $k \geq 2$ に対して、 $F_{k+2} > 2F_k$ が成り立つ。
2. Zeckendorf 表現を持つ数 N から x ($1 \leq x < N$) を引いた数 $N - x$ を再び Zeckendorf 分解したとき、その最も小さい項（末尾の項）は $2x$ 以下となる。

これらの前提知識を用いることで、フィボナッチ Nim の必勝条件は以下のように簡潔にまとめられる。

【定理 3.16】 フィボナッチ Nim の必勝条件

初期の石の数 N が「フィボナッチ数」であるならば後手必勝、そうでないならば先手必勝である。

証明

初期の石の数 N を、Zeckendorf の定理を用いて連続しないフィボナッチ数の和 $N = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m}$ ($k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geq 2$) に分解する。

1. N がフィボナッチ数でない（先手必勝）場合：

分解された項は 2 つ以上存在する ($m \geq 2$)。先手は初手で、最も小さい項である F_{k_m} 個の石をすべて取る。すると後手が次に取れる最大の石の数は $2F_{k_m}$ となる。ここで、Zeckendorf 表現の性質から $k_{m-1} \geq k_m + 2$ であり、上の性質 1 より $F_{k_{m-1}} \geq F_{k_m+2} > 2F_{k_m}$ が成り立つ。したがって、後手は次に小さい項 $F_{k_{m-1}}$ を取り切ることができず、必ずある数 x 個 ($1 \leq x \leq 2F_{k_m} < F_{k_{m-1}}$) の石を取るようになる。

後手が x 個の石を取った後、残った石の数を再び Zeckendorf 表現で分解する。上の性質 2 より、「ある数から x を引いて Zeckendorf 分解したとき、その最小の項は必ず $2x$ 以下になる」ため、先手は次の自分のターンで「新たに分解された Zeckendorf 表現の最小の項」をちょうど取り切ることができる上限 ($2x$) を必ず持っていることになる。

先手がこの最小の項（これを y とする）を取ると、後手の上限は $2y$ となるが、残った項は連続しないフィボナッチ数であるため、再び後手の上限 $2y$ は、残っている最小の項よりも真に小さい状態になる。これを繰り返すことで、先手は常に Zeckendorf 表現の最小の項を取り切ることができるので、必勝である。

2. N がフィボナッチ数である（後手必勝）場合：

分解された項は 1 つだけである。先手は初手で N 個すべての石を取ることはできないため、ある数 $x < N$ 個の石を取る。すると残りの石 $N - x$ は新たな Zeckendorf 表現に分解され、後手は先手の取った x に対して上限 $2x$ を持つ。性質 2 の「 $N - x$ を分解したときの最小の項は $2x$ 以下になる」という事実により、今度は後手が「常に最小の項を取り切る」という上記の必勝戦略をそのまま実行できる立場になる。したがって、後手必勝となる。□

▶▶ 3.7 Wythoff の Nim

もう一つ、Nim の拡張として非常に有名な Wythoff の Nim を紹介する。これは片方の山から石を取るだけでなく両方の山から同じ数だけ石を取る操作が追加されたゲームであり、必勝条件に黄金比が現れることで知られている。

【定義 3.17】 Wythoff の Nim のルール

2 つの山があり、それぞれ A, B 個の石がある。プレイヤーは交互に以下のいずれかの操作を行う。

- どちらか 1 つの山を選び、1 個以上の石を取る。
- 両方の山から、同じ個数の石を同時に取る。

最後に石を取ったプレイヤーの勝ちとなる。

山の石を (x, y) などと座標のように表記する。ただし、順序は関係ないので (x, y) と (y, x) は同一のものとして扱う。このゲームの解析には、以下の Rayleigh の定理 (Beatty の定理) が決定的な役割を果たす。

【定理 3.18】 Rayleigh の定理 (Beatty の定理)

α, β を $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ を満たす正の無理数とする。このとき、2 つの数列 $a_n = \lfloor n\alpha \rfloor, b_n = \lfloor n\beta \rfloor$ ($n = 1, 2, \dots$) は、任意の正整数を重複なく網羅する。

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ すなわち $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$ を満たす無理数である。したがって、数列 $A_n = \lfloor n\phi \rfloor$ と $B_n = \lfloor n\phi^2 \rfloor$ ($n \geq 1$) はすべての正の整数を重複なくちょうど 1 回ずつ網羅する。また、 $\phi^2 = \phi + 1$ より、2 つの数列の差は $B_n - A_n = \lfloor n(\phi + 1) \rfloor - \lfloor n\phi \rfloor = n$ となる。

【定理 3.19】 Wythoff の Nim の必勝条件

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (黄金比) とする。 n 番目の必敗状態 (A_n, B_n) は、以下の式で与えられる。

$$A_n = \lfloor n\phi \rfloor, \quad B_n = \lfloor n\phi^2 \rfloor \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

現在の状態がこの必敗状態のいずれかに該当すれば後手必勝、そうでなければ先手必勝である。

証明

状態の集合 $P = \{(A_n, B_n) \mid n \geq 0\}$ が必敗状態の集合であることを示そう。

1. 必敗状態から必敗状態へは遷移できない：

ある必敗状態 (A_n, B_n) から 1 回の操作で別の必敗状態 (A_m, B_m) ($n \neq m$) へ遷移できると仮定する。

- 片方の山のみを減らす場合：遷移後の状態に A_n または B_n のいずれかの値が残る。しかし、Rayleigh の定理の一意性に関する主張により、相異なる必敗状態が同じ座標を共有することはない。したがって不適である。
- 両方の山から同じ数だけ減らす場合：2 つの山の差は変化しないはずだが、 $B_n - A_n = n \neq m = B_m - A_m$ であるため、差が異なる別の必敗状態へ遷移することは不可能である。

したがって、必敗状態からの任意の操作は必ず必勝状態 (P に含まれない状態) へ遷移する。

2. 必勝状態から必ず必敗状態へ遷移できる：

必敗状態に含まれない任意の状態 (x, y) ($x \leq y$ とする) を考える。差を $d = y - x$ とする。

- $x = A_d$ のとき：必敗状態 (A_d, B_d) でないことから $y \neq B_d$ である。 $y > B_d$ ならば y を減らすことで (A_d, B_d) へ遷移できる。
- $x > A_d$ のとき：両方の山から同時に $x - A_d$ 個減らすことで、状態 (A_d, B_d) へ遷移できる。
- $x < A_d$ のとき：Rayleigh の定理より、 x はある k に対して $x = A_k$ または $x = B_k$ と表される。 $x = A_k$ ならば $x < A_d$ より $k < d$ となり、 $y = x + d > A_k + k = B_k$ であるから、 y の山を減らすことで (A_k, B_k) へ遷移できる。 $x = B_k$ ならば $y \geq x = B_k > A_k$ であるため、 y の山を減らすことで (B_k, A_k) へ遷移できる。

以上より、どのような必勝状態からであっても、1 回の操作で必ずある必敗状態へ遷移させることができる。 □

4 Nim に帰着できるゲーム

▶▶ 4.1 Corner the Rook / Queen

ここでは、Corner the Rook と Corner the Queen について紹介する。前者は有名問題ではないのかもしれないが、非常に親しみやすい例なので紹介しようと思う。

【定義 4.1】 Corner the Rook のルール

2 次元の盤上のマス (A, B) に駒を 1 個置く。プレイヤーは交互に以下のいずれかを行う。

- 駒を左方向に、1 マス以上移動する。
- 駒を上方向に、1 マス以上移動する。

ただし、盤外に駒が出るような移動は行えない。先に駒を動かせなくなったプレイヤーが負けとなる。

【定義 4.2】 Corner the Queen のルール

2 次元の盤上のマス (A, B) に駒を 1 個置く。プレイヤーは交互に以下のいずれかを行う。

- 駒を左方向に、1 マス以上移動する。
- 駒を上方向に、1 マス以上移動する。
- 駒を左上方向に、1 マス以上移動する。

ただし、盤外に駒が出るような移動は行えない。先に駒を動かせなくなったプレイヤーが負けとなる。

これらは、Nim やその派生のゲームと対応付けることができる。

【定理 4.3】 Nim との対応

- (1) 駒の座標 (x, y) から始まるような Corner the Rook は石の数が x, y 個であるような 2 山の Nim と完全に等価である。
- (2) 駒の座標 (x, y) から始まるような Corner the Queen は石の数が x, y 個であるような Wythoff の Nim と完全に等価である。

したがって、Corner the Rook の先手必勝条件は 2 つの座標が相異なることであり、Corner the Queen は最初の座標 (x, y) が $\lfloor n\phi \rfloor, \lfloor n\phi^2 \rfloor$ の形で表されないことである。

▶▶ 4.2 Turning Turtles

コインを裏返す操作を行うゲームの一種である。一見すると Nim とは無関係に見えるが、各コインの状態が独立した Nim の山に対応することから、同値なゲームに帰着できる。

【定義 4.4】 Turning Turtles のルール

N 枚のコインが左から順に $0, 1, 2, \dots, N-1$ 番目として横一列に並んでおり、それぞれ「表」または「裏」を向いている。2 人のプレイヤーは交互に以下の操作を行う。

- 表を向いているコインを 1 枚選び（位置を i とする）、裏に変える。
- 選んだコインより左側にあるコイン（位置 $j < i$ ）を 1 枚選び、裏表を反転させる。

先に操作を行えなくなったプレイヤーの負けとなる。

【定理 4.5】 Turning Turtles の必勝条件

表を向いているコインの位置（0 番目 $\sim N-1$ 番目）の集合を H とする。 $X = \bigoplus_{i \in H} i$ としたとき、 $X \neq 0$ ならば先手必勝、 $X = 0$ ならば後手必勝である。

実は、Turning Turtles における位置 i にある表コインは Nim における石が i 個ある山と完全に等価な振る舞いをするに基づいている。実際、Turning Turtles における各操作は次のように Nim の操作として解釈できる。

- 操作前に位置 j のコインが「裏」であった場合は、位置 j が新たに「表」となる。これは、石が i 個の山が石が j 個の山へ変化した状態に対応する。
- 操作前に位置 j のコインが「表」であった場合は、位置 j のコインも「裏」になるため、位置 i と位置 j の 2 つの表コインが同時に盤面から消滅する。Nim の文脈では、これは「石が i 個の山を j 個に変化させた結果、盤面に石が j 個の山が 2 つ存在する状態になった」ことを意味する。不偏ゲームにおいて、完全に同一の独立したゲームが 2 つ存在する状態は、一方が他方の手を模倣する対称戦略（まねっこ戦略）が可能であるため互いに相殺し合う。したがって、同じ個数の山が 2 つ存在する場合、それらは無視して考えることができる。

簡素な説明ではあるが、以上により、位置 j の状態に関わらず、各表コインは互いに干渉しない独立した Nim の山として扱えることがわかる。全体のゲームの Grundy 数は各表コインのインデックスの排他的論理和となるため、その値 X が 0 か否かによって勝敗条件が決定される。

参考文献

- [1] 安福智明・坂井公・末續鴻輝,『組合せゲーム理論の世界』, 共立出版, 2024.
- [2] けんちゃん,「隣の山に石を渡していく Nim (staircase nim)」,『けんちゃんの競プロ精進記録』, 2019, <https://drken1215.hatenablog.com/entry/2019/03/15/114200>
- [3] Whinihan, M. J., "Fibonacci Nim", Fibonacci Quarterly, 1(4), 1963, <https://www.fq.math.ca/Scanned/1-4/whinihan.pdf>
- [4] Okreylos, 「Corner the Queen」, University of California, Davis, 1999, <https://web.cs.ucdavis.edu/~okreylos/TAsnip/Fall1999/CornerTheQueen.html>