番号付けされた minipage 環境　使用例 1

@Metachick_2021

E を 2 次単位行列とする。既知の事実として、G の位数が 16 かつ $G=\{A^n, A^nB \mid 0 \leq n \leq 7\}$ であることと、G の各元の位数が右の表 1 で与えられることがわかっている。また、$BA^i = A^{-i}B\ (i \in \mathbb{Z})$ かつ $A^8=E,\ B^2=E$ が成り立つ。Lagrange の定理より、G の部分群が存在するならその位数は G の正の約数であるほかない。すなわち、G の部分群 H に関して、$|H|$ は $1, 2, 4, 8, 16$ のいずれかである。以下、$|H|$ に関して場合分けを行う。

位数	元
1	E
2	$A^4,\ A^nB\ (0 \leq n \leq 7)$
4	$A^2,\ A^6$
8	$A,\ A^3,\ A^5,\ A^7$

表 1：G の各元の位数

(i)　$|H|=1$ の場合、H は自明な部分群 $\{E\}$ となる。

(ii)　$|H|=2$ の場合、H は E と位数 2 の元をちょうど一つ含むほかない。逆に、E と位数 2 の元をちょうど一つ含むとき、H は G の部分群となる。これより、位数 2 の部分群は $\{E, A^4\},\ \{E, A^iB\}(0 \leq i \leq 7)$ である。

(iii)　$|H|=4$ の場合、H の元の位数は $1, 2, 4$ のいずれかである。H が位数 4 の元 X を含むとき、$\langle X\rangle \subseteq H$ と $|\langle X\rangle|=4$ から $4 \leq |H|$ を得る。これより、$|H|=4$ と併せて $H=\langle X\rangle$ となるほかない。$\langle A^2\rangle=\langle A^6\rangle$ に留意して、この場合の部分群は具体的には $\{E, A^2, A^4, A^6\}$ のみである。

以後、H が位数 2 以下の元しか持たないとする。このとき、H は単位元と位数 2 の元を 3 つ含む。いま、G の位数 2 の元は $A^4,\ A^nB\ (0 \leq n \leq 7)$ ですべてであったから、A^nB の形の元を少なくとも 2 つ持つ。そのような元を $A^iB, A^jB\ (0 \leq i < j \leq 7)$ とする。このとき、$(A^jB)(A^iB)=(A^jB)(BA^{-i})=A^{j-i} \in H$ である。A^{j-i} の位数も 2 であるほかなく、すなわち $j-i=4$ を得る。逆に、$\{E, A^4, A^iB, A^{i+4}B\}(0 \leq i \leq 3)$ は G の部分群を成す。位数 4 の部分群は以上の議論ですべてである。

(iv)　$|H|=8$ の場合、H の元の位数は $1, 2, 4, 8$ のいずれかである。H が位数 8 の元 X を含むとき、$\langle X\rangle \subseteq H$ と $|\langle X\rangle|=8$ から $8 \leq |H|$ を得る。これより、$|H|=8$ と併せて $H=\langle X\rangle$ となるほかない。$\langle A^1\rangle=\langle A^3\rangle=\langle A^5\rangle=\langle A^7\rangle$ に留意して、この場合の部分群は具体的には $\{A^i \mid 0 \leq i \leq 7\}$ のみである。

以後、H が位数 4 以下の元しか持たないとする。いま、G の位数 $2, 4$ の元は $A^2,\ A^4\ , A^6,\ A^nB\ (0 \leq n \leq 7)$ ですべてであったから、A^nB の形の元を少なくとも 4 つ持つ。そのような元のうち二つを $A^iB, A^jB\ (0 \leq i < j \leq 7)$ とする。このとき、$(A^jB)(A^iB)=(A^jB)(BA^{-i})=A^{j-i} \in H$ であり、$j-i$ は $1, 3, 5, 7$ でない。すなわち、i, j の偶奇は等しい。これより、$H \cap \{AB, A^3B, A^5B, A^7B\}=\emptyset$ または $H \cap \{B, A^2B, A^4B, A^6B\}=\emptyset$ である。前者の場合、$|H|=8$ であったから、$H=\{A^{2i}, A^{2i}B \mid 0 \leq i \leq 3\}$ であるほかなく、逆にこのとき H は G の部分群である。後者の場合、$|H|=8$ であったから、$\{A^{2i}, A^{2i+1}B \mid 0 \leq i \leq 3\}$ であるほかなく、逆にこのとき H は G の部分群を成す。位数 8 の部分群は以上の議論ですべてである。

(v)　$|H| = 16$ の場合、H は G 自身となる。

以上より、G の部分群は以下の表 2 で与えられる 19 個である。

位数	代表的な部分群
1	$\{E\}$
2	$\{E, A^4\},\ \{E, A^iB\}\ (0 \leq i \leq 7)$
4	$\{E, A^2, A^4, A^6\},\ \{E, A^4, A^iB, A^{i+4}B\}\ (0 \leq i \leq 3)$
8	$\{A^i \mid 0 \leq i \leq 7\},\ \{A^{2i}, A^{2i}B \mid 0 \leq i \leq 3\},\ \{A^{2i}, A^{2i+1}B \mid 0 \leq i \leq 3\}$
16	$\{A^i, A^iB \mid 0 \leq i \leq 7\}(= G)$

表 2: G の部分群の位数ごとの分類