q-MacMahon の公式

@Metachick_2021

2026 年 1 月 16 日

1　主要な結果

主要な関数や事実をあらかじめ整理しておく。以下では、特に断らない限りは分割を自然数の広義単調減少列として扱う。

定義 1 Schur 関数

Λ を分割の全体、$SSYT(\lambda, n)$ を分割 λ に $\{1, 2, \cdots, n\}$ を書き込むような半標準盤の全体とする。このとき、*Schur* 関数 S を以下で定める。

$$\begin{array}{cccc} S\colon & \Lambda \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n] \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (\lambda, x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{T \in SSYT(\lambda, n)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\#(i \in T)} \end{array}$$

- $\#(i \in T)$ は半標準版 T 上の i が書かれているマス目の数である。
- $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i^{\#(i \in T)}$ は x^T と表記されることもある。
- S の $\{\lambda\} \times \mathbb{C}^n$ への制限を S_λ と表記することにする。
- Schur 関数は置換に関して不変である。
- Schur 関数は斉次性を持つ、すなわち $S_\lambda(cx_1, \cdots, cx_n) = c^{|\lambda|} S_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ が成り立つ。

定理 1 Jacobi-Trudi 公式

λ を分割、$x_1, \cdots, x_n$ を実数とする。m を $\lambda_m \neq 0$ かつ $\lambda_{m+1} = 0$ なる整数とする。$\lambda' = \lambda^{\mathsf{T}}$ とし、m' を $\lambda'_{m'} \neq 0$ かつ $\lambda'_{m'+1} = 0$ なる整数とする。このとき、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} S_\lambda(x_1, \cdots, x_n) &= \det(h_{\lambda_j - j + i}(x_1, \cdots, x_n))_{i,j=1}^{m} \\ &= \det(e_{\lambda'_j - j + i}(x_1, \cdots, x_n))_{i,j=1}^{m'} \end{aligned}$$

- λ' は λ の転置と呼ばれ、μ などと表記されることも多い。
- 証明は経路の全単射を構成することにより行う。

定理 2 指標公式

λ を分割、$x_1, \cdots, x_n$ を実数とする。$l_i = \lambda_i + n - i$ とすれば、以下が成り立つ。

$$S_\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\det(x_i^{l_j})_{i,j=1}^n}{\Delta(x_1, \cdots, x_n)}$$

- 証明は Jacobi-Trudi 公式を出発点とし、天下り的な母関数を導入することによって行われる。
- 適用する際は、重みの個数 n が行列式の指数や大きさにも登場していることに注意したい。

定理 3 次元公式

λ を分割とする。$l_i = \lambda_i + n - i$ とすれば、以下が成り立つ。

$$S_\lambda(\underbrace{1, \cdots, 1}_{n}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{l_i - l_j}{j - i}$$

- 指標公式の主特殊化である。全ての重みにそのまま 1 を代入すると不定形が現れてしまうので q 変形を用いて導出する。

2　MacMahon の公式

定理 4 MacMahon の公式

$N_{r,s,t}$ を $r \times s \times t$ の箱入り平面分割の総数とする。このとき、以下が成り立つ。

$$N_{r,s,t} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{t} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

証明を与えよう。分割 λ を $\lambda = (\underbrace{t, \cdots, t}_{r}, 0, \cdots)$ で定める。$l_i = \lambda_i + r + s - i$ とおけば、

$$l_i = \begin{cases} t+r+s & (1 \leq i \leq r) \\ 0+r+s & (r < i) \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、次元公式より

$$N_{r,s,t} = S_\lambda(\underbrace{1, \cdots, 1}_{r+s}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r+s} \frac{l_i - l_j}{j-i} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{r+s} \frac{t+j-i}{j-i}$$

が成り立つ。いま、$i \to r+1-i,\ j \to r+j$ と置換すれば、

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{r+s} \frac{t+j-i}{j-i} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s} \frac{i+j+t-1}{i+j-1} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{t} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

が得られた。 □

定理 5 q-MacMahon の公式

$N_{r,s,t}(q)$ を $\displaystyle\sum_{\pi \in B(r,s,t)} q^{|\pi|}$ で定める。このとき、以下が成り立つ。

$$N_{r,s,t}(q) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{t} \frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}$$

- $q \to 1$ の極限を考えれば、MacMahon の公式が得られる。この意味で、MacMahon の公式の一般化、特に q-類似になっている。

まずはじめに、$N_{r,s,t}(q) = \sum_{\pi \subseteq B(r,s,t)} q^{|\pi|}$ の意味について考える。これは体積 n の三次元ヤング図形の個数を与えるような母関数になっている。すなわち、$N_{r,s,t}(q)$ の q^n の係数が体積 n の三次元ヤング図形の個数である。

半標準盤（すなわち、Schur 関数）については、特殊値を計算するツールが揃っている。そこで、半標準盤に帰着することを考える。PS(λ, s) を分割 λ に $\{1, 2, \cdots, s\}$ を書き込むような平面分割の全体とする。また、

分割 λ を $\lambda = (\underbrace{t, \cdots, t}_{r}, 0, \cdots)$ で定める。

三次元ヤング図形（の平面分割による表示）π と半標準盤 τ は一対一に対応していた。具体的には、以下のように対応付ければよかった。左側がヤング図形（の平面分割による表示）であり、右側が半標準盤である。

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1t} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{r1} & \pi_{r2} & \cdots & \pi_{rt} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \tau = \begin{bmatrix} \pi_{11}+1 & \pi_{12}+1 & \cdots & \pi_{1t}+1 \\ \pi_{21}+2 & \pi_{22}+2 & \cdots & \pi_{2t}+2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{r1}+r & \pi_{r2}+r & \cdots & \pi_{rt}+r \end{bmatrix}$$

いま、$\tau_{ij} = \pi_{ij} + i$ という関係式が成り立つ。平面分割において、各 π_{ij} はそこでの三次元ヤング図形の高さを表していたのだから、最終的に計算したい値は次で表現できる。

$$N_{r,s,t}(q) = \sum_{T \in \mathrm{PS}(\lambda,s)} \prod_{i=0}^{s} (q^i)^{\#(i \in T)} = \sum_{T \in \mathrm{PS}(\lambda,s)} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} q^{\pi_{ij}}$$

一方で、Schur 関数を用いれば、

$$S_\lambda(x_1, \cdots, x_{r+s}) = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda,r+s)} \prod_{i=1}^{r+s} x_i^{\#(i \in T)} = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda,r+s)} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} x_{\tau_{ij}}$$

が得られる。特に、

$$S_\lambda(q, \cdots, q^{r+s}) = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda,r+s)} \prod_{i=1}^{r+s} (q^i)^{\#(i \in T)} = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda,r+s)} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} q^{\tau_{ij}}$$

となる。三次元ヤング図形（の平面分割による表示）と半標準盤が対応していたことも用いれば、

$$\sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda,r+s)} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} q^{\tau_{ij}} = \sum_{T \in \mathrm{PS}(\lambda,s)} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} q^{\pi_{ij}+i}$$

となる。よって、

$$S_\lambda(q, \cdots, q^{r+s}) = \sum_{T \in \mathrm{PS}(\lambda,s)} \left(\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} q^{\pi_{ij}} \right) \left(\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} q^{i} \right) = q^{\frac{tr(r+1)}{2}} N_{r,s,t}(q)$$

を得る。すなわち、

$$N_{r,s,t}(q) = q^{-\frac{tr(r+1)}{2}} S_\lambda(q, \cdots, q^{r+s}) = q^{-\frac{tr(r+1)}{2}} S_\lambda(q^{r+s}, \cdots, q) = q^{-\frac{tr(r-1)}{2}} S_\lambda(q^{r+s-1}, \cdots, 1)$$

ただし、Schur 関数の置換不変性と斉次性を用いた。最後に、指標公式を用いて計算することで、

$$N_{r,s,t}(q) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=1}^{t} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}$$

を得る。これより、q-MacMahon の公式が導出された。 □

3 MacMahon 関数

q-MacMahon の公式において、$\pi \subseteq B(r,s,t)$ の制約を取り払うことを考える。このようにして得られた母関数（形式的冪級数）はまさに整数 n の平面分割の個数を生成する公式になっているのである。

定理 6 MacMahon 関数

$N_{\infty,\infty,\infty}(q)$ を $\displaystyle\sum_{\pi} q^{|\pi|}$ で定める。このとき、以下が成り立つ。

$$N_{\infty,\infty,\infty}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}$$

先程述べた通り、$N_{\infty,\infty,\infty}(q)$ の q^n の係数は整数 n の平面分割の個数を与える公式になっている。

$$N_{r,s,t}(q) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{t}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\frac{1-q^{i+j+t-1}}{1-q^{i+j-1}}$$

において、$r,s \to \infty$ を考えると、

$$N_{\infty,\infty,t}(q) = \prod_{i,j=1}^{\infty}\frac{1-q^{i+j+t-1}}{1-q^{i+j-1}} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{n+t})^n}{(1-q^n)^n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{n+t}}{1-q^n}\right)^n$$

を得る。ただし、$i+j-1=n$ と置いた。さらに、$t \to \infty$ を考えれば、

$$N_{\infty,\infty,\infty}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^n}\right)^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}$$

が得られる。 □

補題 1 無限乗積の収束判定

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば、無限乗積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ も収束する。

$a_n = (1-q^n)^{-n} - 1$ とおけば、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

と表せる。補題より、$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束すれば乗積は収束するので、以降はこの級数の収束を示す。対数の Taylor 展開などを用いることで、

$$|a_n| = \bigl|\exp\bigl(-n\ln(1-q^n)\bigr) - 1\bigr| \le \exp\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n\,|q|^{nk}}{k}\Bigr) - 1$$

となる。さらに、$k \geq 1$ であることから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n\,|q|^{nk}}{k} \leq n \sum_{k=1}^{\infty} |q|^{nk} = \frac{n|q|^n}{1-|q|^n},$$

であるので、

$$|a_n| \leq \exp\Bigl(\frac{n|q|^n}{1-|q|^n}\Bigr) - 1.$$

$|q| < 1$ のもとでは、

$$\frac{n|q|^n}{1-|q|^n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから、ある N を取れば $n \geq N$ に対して

$$\frac{n|q|^n}{1-|q|^n} \leq 1$$

が成り立つ。加えて、$x \leq 1$ に対し $\exp(x) - 1 \leq 2x$ が成り立つので、$C = \frac{2}{1-|q|^N}$ とすれば、

$$|a_n| \leq \exp\Bigl(\frac{n|q|^n}{1-|q|^n}\Bigr) - 1 \leq 2\frac{n|q|^n}{1-|q|^n} \leq 2\frac{n|q|^n}{1-|q|^N} = C \cdot n|q|^n \quad (n \geq N).$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + C \sum_{n=N}^{\infty} n|q|^n < \infty$$

である。よって、元の無限乗積は収束する。 □

参考文献

1. 高崎金久『線形代数と数え上げ［増補版］』日本評論社，2021 年.